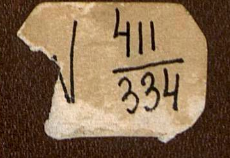


Къ 200 лѣтнему юбилею закона большихъ чиселъ.

ИСЧИСЛЕНІЕ ВѢРОЯТНОСТЕЙ.

А. А. Марковъ.

ТРЕТЬЕ ИЗДАНІЕ,

пересмотрѣнное и значительно дополненное.

Съ портретомъ Якова Бернулли.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 лин., № 12.
1913.


AC. BERNOULLI, MATH. P

Предисловіе 3-го изданія.

Третье изданіе моей книги отличается отъ второго нѣкоторыми, болѣе или менѣе важными, добавленіями.

Во-первыхъ, я счелъ полезнымъ сдѣлать рядъ новыхъ замѣчаній въ первой главѣ, для лучшаго выясненія основаній исчисленія вѣроятностей. Затѣмъ, въ третьей главѣ, посвященной закону большихъ чиселъ, я не ограничиваюсь теперь случаями Чебышева, но въ особомъ параграфѣ показываю возможность дальнѣйшихъ обобщеній.

Новый параграфъ введенъ также въ шестой главѣ, при чемъ я имѣлъ въ виду пояснить способъ наименьшихъ квадратовъ, прикладывая его къ важному вопросу объ опредѣленіи вѣроятности по наблюденіямъ, и, кстати, на частномъ примѣрѣ показать, какъ и почему намъ приходится для одного и того же событія разсматривать нѣсколько различныхъ вѣроятностей, при одинаковыхъ, повидимому, условіяхъ.

Но главное добавленіе помѣщено въ концѣ книги и составляетъ особое приложеніе къ ней. Въ немъ я обстоятельно и по возможности просто излагаю основанія метода математическихъ ожиданій и прилагаю ихъ къ доказательству теоремы о предѣлѣ вѣроятностей во многихъ случаяхъ, какъ для величинъ независимыхъ, такъ и для связанныхъ.

На это добавленіе я особенно обращаю вниманіе читателей, такъ какъ оно существенно отличаетъ новое изданіе моей книги

отъ другихъ сочиненій, посвященныхъ систематическому изложенію исчисленія вѣроятностей.

Въ заключеніе замѣчу, что въ 1913 году исполняется двѣсти лѣтъ со времени появленія въ свѣтъ труда «Ars conjectandi», гдѣ впервые была опубликована и строго доказана знаменитая теорема Якова Бернулли, положившая начало закону большихъ чиселъ; поэтому я разсматриваю свою книгу какъ юбилейное изданіе и прикладываю къ ней портретъ Якова Бернулли, воспроизведенный по фотографіи съ портрета масляными красками, находящагося въ Базелѣ. Эта фотографія прислана мнѣ библіотекой Базельскаго Университета, за что я выражаю ей глубочайшую признательность въ лицѣ ея оберъ-библіотекаря доктора Карла Христофа Бернулли.

А. Марковъ.

1913 года.

Предисловіе 2-го изданія.

Въ этой книгѣ я излагаю исчисленіе вѣроятностей какъ одинъ изъ отдѣловъ математики, не занимаясь подробнымъ разсмотрѣніемъ всѣхъ возможныхъ, болѣе или менѣе важныхъ, приложеній его.

Не вдаваясь въ длинныя разсужденія объ основаніяхъ исчисленія вѣроятностей, я стараюсь ясно поставить положенія, необходимыя для построенія извѣстныхъ теорій, приводящихъ къ вопросамъ чистаго анализа, которымъ и посвящена моя книга.

Вмѣстѣ съ тѣмъ я, по возможности, избѣгаю излишнихъ положеній, хотя бы и общепринятыхъ; избѣгаю я также сомнительныхъ разсужденій, въ особенности облеченныхъ въ форму математическихъ доказательствъ, ставя на первомъ планѣ возможную точность и строгость выводовъ и заключеній.

Важную роль въ исчисленіи вѣроятностей, какъ и въ другихъ отдѣлахъ математики, играютъ приближенныя формулы. Къ такимъ формуламъ приходится прибѣгать не только въ тѣхъ случаяхъ, когда выводъ точныхъ формулъ представляетъ чрезмѣрныя затрудненія или сами эти формулы отличаются чрезвычайною сложностью, но и въ тѣхъ случаяхъ, когда вычисленія по точнымъ формуламъ требуютъ хотя бы и простыхъ, но крайне продолжительныхъ вычисленій.

Для правильнаго примѣненія приближенной формулы важно имѣть надлежащую оцѣнку ея погрѣшности.

Однако, имѣя въ виду цѣли прикладной математики, нельзя совершенно отказаться и отъ приближенныхъ формулъ, остающихся, по той или иной причинѣ, безъ оцѣнки ихъ погрѣшности. Подобныя формулы встрѣчаются и въ моей книгѣ.

Слѣдуетъ замѣтить, что въ приложеніяхъ къ изслѣдованіямъ природы вопросъ о погрѣшности формулъ получаетъ особый характеръ; ибо эти изслѣдованія относятся къ величинамъ, которыя неизбѣжно остаются не вполнѣ опредѣленными, и потому исчезаетъ возможность математической точности.

Второе изданіе нѣсколько отличается отъ перваго. Мною сдѣланы нѣкоторыя измѣненія и дополненія въ текстѣ; вмѣстѣ съ тѣмъ я расширилъ указанія литературы, не задаваясь однако цѣлью дать полный списокъ трудовъ по исчисленію вѣроятностей. Я счелъ не лишнимъ также помѣстить въ концѣ книги шестизначную таблицу значеній извѣстнаго интеграла $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$, который играетъ важную роль въ исчисленіи вѣроятностей. Эта таблица взята изъ моей «Table des valeurs de l'intégrale $\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt$», гдѣ значенія послѣдняго интеграла, безъ множителя $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, даны съ 11ью десятичными знаками и указаны различные способы для вычисленія его, которыми я пользовался. Не ограничиваясь простой перепечаткой прежней таблицы, я сравнилъ ее съ таблицей Jas. Burgess «On the Definite Integrale $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt$, with Extended Tables of Values» (Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Vol. XXXIX) и въ случаяхъ разногласія чиселъ обращался къ своей 11ти значной таблицѣ. Такимъ образомъ я убѣдился въ необходимости измѣнить, на одну единицу послѣдняго знака, нѣкоторыя изъ чиселъ прежней шестизначной таблицы значеній $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$, что и сдѣлано въ новой таблицѣ.

А. Марковъ.

ГЛАВА I.

Основныя понятія и теоремы.

§ 1. Понятіе о вѣроятности связано съ тѣми вопросами, на которые мы*) можемъ отвѣчать только такъ: должно быть

либо A, либо B, либо $C, \ldots$, либо F, либо G.

Для однообразія и краткости условимся называть

$$A, B, C, \ldots, F, G,$$

появляющіяся въ отвѣтѣ на какой-нибудь вопросъ, *событіями* или *случаями*, независимо отъ содержанія вопроса. Совокупность же условій, при которыхъ вопросъ получаетъ опредѣленное рѣшеніе, будемъ называть *испытаніемъ*.

Если бы эта совокупность была извѣстна, то было бы извѣстно, какое именно изъ событій

$$A, B, C, \ldots, F, G$$

имѣетъ мѣсто. Но вмѣсто нея извѣстны только нѣкоторыя условія испытанія.

Замѣтимъ, что извѣстныя условія часто можно разсматривать какъ постоянныя для многихъ испытаній, а неизвѣстныя какъ перемѣнныя, отличающія испытанія другъ отъ друга. Тогда

---

*) Слово «мы» общеупотребительно въ математикѣ и не сообщаетъ исчисленію вѣроятностей никакой особой субъективности.

наши сужденія, основанныя только на извѣстныхъ условіяхъ, будутъ одинаково относиться къ каждому изъ этихъ испытаній, которыя могутъ сопровождаться совершенно различными результатами.

Событія

$$A,\ B,\ C, \ldots F,\ G$$

мы называемъ *единственно возможными*, если одно изъ нихъ навѣрно должно быть. Соблюденіе этого условія, конечно, необходимо для того, чтобы нашъ отвѣтъ, состоящій въ перечисленіи событій, можно было признать правильнымъ.

Мы будемъ называть событія

$$A,\ B,\ C, \ldots F,\ G$$

несовмѣстимыми, если каждое изъ нихъ исключаетъ остальныя, такъ что невозможно одновременное существованіе какихъ бы то ни было двухъ изъ этихъ событій.

Эти термины не возбуждаютъ никакихъ сомнѣній, хотя мы не имѣемъ вѣрныхъ способовъ для рѣшенія вопроса о совмѣстимости или несовмѣстимости событій во всѣхъ случаяхъ.

Для установленія понятія о вѣроятности, какъ о числѣ, необходимъ еще одинъ терминъ, который не возбуждаетъ сомнѣнія только въ чисто теоретическихъ вопросахъ.

Два событія мы называемъ *равновозможными*, если нѣтъ никакихъ основаній ожидать одного изъ нихъ предпочтительно передъ другимъ. Нѣсколько событій мы называемъ равновозможными, если каждыя два изъ нихъ равновозможны *).

Въ извѣстныхъ теоретическихъ вопросахъ равновозможность разсматриваемыхъ событій представляется нашему уму вполнѣ ясно; въ другихъ мы условливаемся, какія именно событія считаемъ равновозможными. Въ практическихъ же вопросахъ

---

*) По моему мнѣнію различныя понятія опредѣляются не столько словами, каждое изъ которыхъ можетъ въ свою очередь потребовать опредѣленія, какъ нашимъ отношеніемъ къ нимъ, которое выясняется постепенно.

мы можемъ быть вынуждены считать равновозможными и такія событія, равновозможность которыхъ весьма сомнительна.

Положимъ теперь, что событія

$$A, B, C, \ldots, F, G$$

единственно возможны, несовмѣстимы и равновозможны. Тогда вѣроятностью каждаго изъ этихъ событій называется дробь, числитель которой равенъ единицѣ, а знаменатель числу ихъ.

Отъ этого простѣйшаго случая перейдемъ къ болѣе сложному.

Положимъ, что единственно возможныя и несовмѣстимыя событія

$$A, B, C, \ldots, F, G$$

не равновозможны, но могутъ быть разбиты на равновозможныя, представляющія частные виды ихъ. Пусть

$a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ частные виды событія A,

$b_1, b_2, \ldots, b_\beta$ частные виды событія B,

. . . .

$g_1, g_2, \ldots, g_\omega$ частные виды событія G;

такъ что при существованіи A должно быть одно и только одно изъ событій

$$a_1, a_2, \ldots, a_\alpha,$$

при существованіи B должно быть одно и только одно изъ событій

$$b_1, b_2, \ldots b_\beta$$

и т. д.

Событія

$$a_1, a_2, \ldots, a_\alpha, b_1, b_2, \ldots, b_\beta, \ldots, g_1, g_2, \ldots, g_\omega,$$

конечно, несовмѣстимы; кромѣ того мы предполагаемъ ихъ, какъ было уже сказано, равновозможными.

При такихъ предположеніяхъ мы назовемъ *вѣроятностями* событій

$$A, B, C, \ldots, G$$

соотвѣтственно дроби

$$(1)\quad \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\ldots+\omega},\ \frac{\beta}{\alpha+\beta+\ldots+\omega},\ \ldots\ldots\ \frac{\omega}{\alpha+\beta+\ldots+\omega}.$$

Условимся называть событія

$$a_1,\ a_2,\ldots\ldots,\ a_\alpha,$$

при которыхъ имѣетъ мѣсто A, *благопріятными* для A, событія

$$b_1,\ b_2,\ldots\ldots,\ b_\beta$$

благопріятными для B и т. д; всѣ же равновозможныя событія

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_\alpha,\ b_1,\ b_2,\ldots,\ b_\beta,\ldots\ g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_\omega$$

будемъ называть событіями или случаями, соотвѣтствующими вопросу. Установивъ эти названія, мы можемъ формулировать данное нами опредѣленіе вѣроятности слѣдующимъ образомъ.

Вѣроятностью событія называется дробь, числитель которой представляетъ число равновозможныхъ случаевъ, благопріятныхъ этому событію, а знаменатель число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ, соотвѣтствующихъ вопросу.

На этомъ опредѣленіи вѣроятности и будутъ основаны дальнѣйшіе выводы. Приведеніе событій къ равновозможнымъ не представляетъ, конечно, вполнѣ опредѣленной операціи, но, напротивъ, допускаетъ значительное разнообразіе, такъ какъ мы можемъ увеличивать число равновозможныхъ случаевъ, разбивая ихъ на болѣе частные виды, и можемъ уменьшать число равновозможныхъ случаевъ, соединяя по нѣсколько случаевъ въ одинъ. Поэтому для одного и того же событія мы можемъ получить нѣсколько выраженій вѣроятности его. Чтобы всѣ эти выраженія приводились къ одному числу, важно строго соблюдать слѣдующія основныя положенія.

Два событія равновозможны, если они разбиваются на одинаковое число равновозможныхъ событій; два событія неравновозможны, если они разбиваются на неодинаковое число равновозможныхъ случаевъ: при $\alpha=\beta$ событія A и B равновозможны, а при $\alpha>\beta$ и при $\alpha<\beta$ неравновозможны. И наоборотъ если

два равновозможныхъ событія разбиваются на неодинаковое число различныхъ событій, то эти послѣднія не могутъ быть равновозможными.

Всякую замѣну однихъ равновозможныхъ случаевъ другими, неудовлетворяющую этому условію, необходимо разсматривать какъ измѣненіе данныхъ.

И соотвѣтственно этому можно признать теоретически правильно поставленными только тѣ вопросы исчисленія вѣроятностей, которые, не оставляя искомыхъ вѣроятностей неопредѣленными, не допускаютъ измѣненія ихъ безъ яснаго указанія на измѣненіе данныхъ.

Неправильно поставленныя задачи, часто весьма интересныя и важныя, съ практической точки зрѣнія, не могутъ быть, конечно, предметомъ строгаго математическаго анализа, пока тѣми или иными добавочными данными онѣ не превращены въ правильно поставленныя.

По установленному нами опредѣленію вѣроятность представляется раціональнымъ числомъ, лежащимъ между нулемъ и единицей. Опредѣляя же вѣроятности нѣкоторыхъ событій, какъ предѣлы вѣроятностей другихъ событій, мы введемъ ирраціональныя числа. О введеніи въ исчисленіе вѣроятностей ирраціональныхъ чиселъ мы будемъ говорить подробнѣе впослѣдствіи.

Предѣльными величинами вѣроятности различныхъ событій служатъ единица и нуль. Вѣроятность достигаетъ единицы для событій достовѣрныхъ, которымъ благопріятствуютъ всѣ случаи, и обращается въ нуль для событій невозможныхъ, которымъ не благопріятствуетъ ни одинъ случай.

И мы можемъ утверждать, что вѣроятность единица указываетъ на достовѣрность событія, а вѣроятность нуль на невозможность его, по крайней мѣрѣ тогда, когда эта вѣроятность установлена прямымъ счетомъ равновозможныхъ случаевъ.

§ 2. Для выясненія понятія о вѣроятности, какъ о числѣ, обратимся къ слѣдующему примѣру, которымъ будемъ пользоваться и далѣе.

Пусть взятъ сосудъ, содержащій a бѣлыхъ шаровъ съ № 1, b бѣлыхъ шаровъ съ № 2, c черныхъ шаровъ съ № 1, d черныхъ шаровъ съ № 2 и не содержащій никакихъ другихъ шаровъ.

Изъ этого сосуда вынутъ одинъ шаръ, и поставленъ вопросъ о цвѣтѣ, или о нумерѣ его, или наконецъ о цвѣтѣ и нумерѣ.

Въ данномъ случаѣ испытаніе состоитъ въ томъ, что изъ сосуда вынимаютъ нѣкоторый опредѣленный шаръ.

Если мы видѣли этотъ шаръ, то можемъ дать на поставленный вопросъ опредѣленный отвѣтъ. Если же вынутаго шара мы не видѣли и извѣстны намъ только вышеуказанныя обстоятельства, то на вопросъ о цвѣтѣ шара мы отвѣтимъ:

либо бѣлый, либо черный,

указывая такимъ образомъ два возможныхъ событія; на вопросъ о нумерѣ шара перечислимъ также два событія:

№ 1 и № 2;

наконецъ, нашъ отвѣтъ о цвѣтѣ и нумерѣ шара будетъ состоять въ перечисленіи четырехъ событій:

бѣлый съ № 1, бѣлый съ № 2, черный съ № 1, черный съ № 2.

Останавливаясь на послѣднемъ вопросѣ, предположимъ сначала, что всѣ наши данныя состоятъ только въ томъ, что сосудъ, изъ котораго вынутъ шаръ, не содержитъ другихъ шаровъ, кромѣ бѣлыхъ и черныхъ съ нумерами 1 и 2.

Тогда перечисленныя нами четыре несовмѣстимыхъ событія, бѣлый съ № 1, бѣлый съ № 2, черный съ № 1, черный съ № 2, будутъ не только единственно возможными, но и равновозможными, и соотвѣтственно этому вѣроятность каждаго изъ нихъ будетъ выражаться дробью $\frac{1}{4}$ и останется этою дробью до тѣхъ поръ, пока нѣтъ никакихъ указаній на ихъ неравновозможность.

При тѣхъ же данныхъ вѣроятность, что шаръ бѣлый, будетъ $\frac{1}{2}$, такъ какъ появленіе бѣлаго шара и появленіе чернаго

шара будутъ также событіями несовмѣстными, единственно возможными и равновозможными.

Положимъ теперь, что намъ извѣстны неравенства

$$a > b > c > д.$$

Въ такомъ случаѣ, придавая значеніе указанію на эти неравенства, мы имѣемъ основаніе ожидать бѣлаго шара съ №. 1, предпочтительно передъ бѣлымъ шаромъ съ №. 2; мы имѣемъ также основаніе ожидать бѣлаго шара съ №. 2, предпочтительно передъ чернымъ шаромъ съ №. 1.

Поэтому, если извѣстны неравенства

$$a > b > c > д,$$

то четыре событія,

бѣлый съ №. 1, бѣлый съ № 2, черный съ №. 1, черный съ № 2,

перестаютъ быть равновозможными.

И мы лишены возможности разбить ихъ на равновозможныя, если только намъ ничего неизвѣстно кромѣ неравенствъ

$$a > b > c > д.$$

При такихъ условіяхъ мы вынуждены отказаться отъ представленія вѣроятностей нашихъ событій опредѣленными числами.

Пусть, наконецъ, намъ извѣстны числа

$$a,\ b,\ c,\ д.$$

Тогда для полученія равновозможныхъ событій мы можемъ разбить разсматриваемыя четыре событія на болѣе частныя.

Съ этою цѣлью отличимъ мысленно всѣ шары другъ отъ друга какими-нибудь значками, напримѣръ, новыми нумерами.

Итакъ, вообразимъ, что бѣлые шары съ №. 1 отличаются другъ отъ друга и отъ прочихъ шаровъ нумерами

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ a,$$

бѣлые шары съ № 2 отличаются нумерами

$$a+1,\ a+2, \ldots,\ a+b,$$

черные съ № 1 отличаются нумерами

$$a+b+1,\ a+b+2, \ldots,\ a+b+c$$

и, наконецъ, черные съ № 2 отличаются нумерами

$$a+b+c+1,\ a+b+c+2, \ldots\ a+b+c+d.$$

Различивъ всѣ шары другъ отъ друга, мы можемъ разбить разсматриваемыя четыре событія на

$$a+b+c+d$$

событій, каждое изъ которыхъ состоитъ въ появленіи шара съ опредѣленнымъ нумеромъ

$$1, 2, 3, \ldots,\ a+b+c+d.$$

Эти новыя событія равновозможны, такъ какъ въ сосудѣ находится по одному шару съ каждымъ нумеромъ

$$1, 2, \ldots,\ a+b+c+d,$$

и потому нѣтъ никакихъ основаній ожидать появленія одного изъ этихъ нумеровъ предпочтительно передъ какимъ-либо другимъ изъ нихъ.

Изъ нихъ a событій, состоящія въ появленіи нумеровъ

$$1, 2, 3, \ldots,\ a,$$

благопріятствуютъ появленію бѣлаго шара съ № 1, такъ какъ они представляютъ частные случаи послѣдняго событія,

Поэтому, согласно опредѣленію, вѣроятность появленія бѣлаго шара съ № 1 выразится дробью

$$\frac{a}{a+b+c+d}.$$

На томъ же основанiи дробь

$$\frac{b}{a+b+c+д}$$

будетъ выражать вѣроятность выхода бѣлаго шара съ № 2, дробь

$$\frac{c}{a+b+c+д}$$

будетъ выражать вѣроятность выхода чернаго шара съ № 1 и, наконецъ, дробь

$$\frac{д}{a+b+c+д}$$

будетъ вѣроятностью выхода чернаго шара съ № 2.

Если же вмѣсто четырехъ событiй мы различимъ только два, изъ которыхъ одно состоитъ въ появленiи бѣлаго шара, а другое въ появленiи чернаго шара, то ихъ вѣроятности соотвѣтственно выразятся дробями

$$\frac{a+b}{a+b+c+д} \text{ и } \frac{c+д}{a+b+c+д}.$$

Положимъ теперь, что къ указаннымъ прежде даннымъ прибавлено еще одно; именно, стало извѣстнымъ, какой изъ двухъ нумеровъ, 1 и 2, стоитъ на вынутомъ шарѣ.

Это новое данное измѣняетъ величину вѣроятности вынутому шару быть бѣлымъ. Именно, если извѣстно, что на вынутомъ шарѣ стоитъ № 1, то на основанiи соображенiй, подобныхъ прежнимъ, мы должны выразить вѣроятность, что этотъ шаръ бѣлый, дробью

$$\frac{a}{a+c},$$

а вѣроятность, что онъ черный, дробью

$$\frac{c}{a+c}.$$

Если же извѣстно, что на вынутомъ шарѣ стоитъ № 2, то вѣроятность, что онъ бѣлый, выразится дробью

$$\frac{b}{b+д}$$

и вѣроятность, что онъ черный, — дробью

$$\frac{д}{b + д}.$$

Приведенный нами примѣръ можетъ служить для поясненія слѣдующей аксіомы *). *Если при извѣстныхъ данныхъ событія*

$$p, q, r, \ldots, u, v$$

равновозможны и дѣлятся по отношенію къ событію А на благопріятныя и неблагопріятныя ему, то по присоединеніи къ этимъ даннымъ указанія на появленіе событія А тѣ изъ событій

$$p, q, r, \ldots, u, v,$$

которыя не благопріятствуютъ событію А, становятся невозможными и, слѣдовательно, отпадаютъ, остальныя же изъ нихъ остаются попрежнему равновозможными.

Приведенный нами примѣръ показалъ также, что далеко не во всѣхъ случаяхъ можно разсматривать вѣроятность, какъ опредѣленное число.

Не останавливаясь на другихъ примѣрахъ несуществованія вѣроятности, какъ опредѣленнаго числа, замѣтимъ, что не одно исчисленіе вѣроятностей, но и другія науки занимаются приближеннымъ разысканіемъ такихъ чиселъ, существованіе которыхъ не установлено и не можетъ быть установлено съ математическою строгостью. Науки, основанныя на опытахъ, стремятся, конечно, къ возможной степени строгости, но не могутъ имѣть въ виду математическую строгость.

Опытнымъ наукамъ слѣдуетъ уподобить и нѣкоторые отдѣлы исчисленія вѣроятностей, непосредственно переходящіе въ ея приложенія къ практикѣ. Но въ теоретическихъ, правильно поставленныхъ, вопросахъ исчисленіе вѣроятностей прямо примыкаетъ къ алгебрѣ.

---

*) Аксіомой мы называемъ такое положеніе, которое устанавливается безъ доказательства какъ основаніе нашихъ разсужденій.

§ 3. Основаніемъ исчисленія вѣроятностей служитъ идея о равновозможныхъ случаяхъ; однако это исчисленіе не существовало бы, какъ особая дисциплина, еслибы во всѣхъ вопросахъ необходимо было достигать такихъ случаевъ и заниматься счетомъ ихъ.

Необходимость, въ каждомъ частномъ случаѣ, обращаться для опредѣленія вѣроятностей къ счету равновозможныхъ случаевъ устраняется основными теоремами исчисленія вѣроятностей, которыя извѣстны подъ названіемъ *теоремы сложенія* и *теоремы умноженія вѣроятностей*.

Доказательство этихъ теоремъ не представляетъ затрудненій, но соединено съ упомянутымъ выше допущеніемъ, что всѣ событія можно приводить къ равновозможнымъ.

Теорема сложенія вѣроятностей.

Вѣроятность случиться одному изъ несовмѣстимыхъ событій, безъ указанія, какому именно, равна суммѣ вѣроятностей этихъ событій.

Доказательство.

Пусть будутъ

$$E_1,\ E_2, \ldots,\ E_k$$

несовмѣстимыя событія. Пусть далѣе

$$C_1,\ C_2, \ldots,\ C_n$$

означаютъ случаи единственно возможные, несовмѣстимые и равновозможные, изъ которыхъ m_1 случаевъ благопріятствуютъ событію E_1, остальные же не благопріятствуютъ ему, m_2 случаевъ благопріятствуютъ событію E_2, остальные же не благопріятствуютъ ему и т. д., наконецъ, m_k случаевъ благопріятствуютъ событію E_k, а остальные не благопріятствуютъ ему.

При такихъ предположеніяхъ вѣроятности событій

$$E_1,\ E_2, \ldots,\ E_k$$

выражаются, согласно опредѣленію, дробями

$$\frac{m_1}{n},\ \frac{m_2}{n}, \ldots,\ \frac{m_k}{n}.$$

Въ виду несовмѣстимости событій

$$E_1, E_2, \ldots, E_k$$

всѣ случаи, благопріятные для опредѣленнаго изъ нихъ, не благопріятствуютъ остальнымъ изъ этихъ событій.

Поэтому, если къ m_1 случаямъ, благопріятнымъ для E_1, мы присоединимъ m_2 случаевъ, благопріятныхъ для E_2, m_3 случаевъ, благопріятныхъ для E_3 и т. д., наконецъ, m_k случаевъ, благопріятныхъ для E_k, то среди полученныхъ нами такимъ образомъ

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k$$

случаевъ не будетъ одинаковыхъ.

Эти различные между собою случаи, число которыхъ равно $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$, благопріятствуютъ появленію того или другого изъ событій

$$E_1, E_2, \ldots E_k,$$

остальные же изъ разсматриваемыхъ нами n случаевъ

$$C_1, C_2, \ldots, C_n$$

не благопріятствуютъ ни одному изъ событій

$$E_1, E_2, \ldots E_k.$$

Слѣдовательно, вѣроятность появленія одного изъ событій

$$E_1, E_2, \ldots, E_k,$$

безъ указанія, какого именно, выразится, согласно опредѣленію, дробью

$$\frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}{n}.$$

Остается замѣтить, что послѣдняя дробь равна суммѣ

$$\frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} + \ldots + \frac{m_k}{n},$$

и теорема доказана.

Примѣчаніе. Разсуждая подобно предыдущему, не трудно замѣтить, что сумма вѣроятностей событій совмѣстимыхъ представляетъ величину бо́льшую, чѣмъ вѣроятность случиться одному изъ нихъ.

Разсматривая событія

$$E_1, E_2, \ldots E_k,$$

какъ различные виды одного событія E, мы можемъ выразить теорему сложенія вѣроятностей еще слѣдующимъ образомъ:

Если нѣкоторое событіе E разбивается на нѣсколько несовмѣстимыхъ видовъ, то его вѣроятность равна суммѣ вѣроятностей всѣхъ этихъ видовъ.

Для поясненія теоремы сложенія вѣроятностей обратимся къ прежнему примѣру.

Вѣроятности появленія бѣлаго шара съ № 1, бѣлаго съ № 2, чернаго съ № 1 и чернаго съ № 2 выражались у насъ соотвѣтственно дробями

$$\frac{a}{a+b+c+\partial}, \quad \frac{b}{a+b+c+\partial}, \quad \frac{c}{a+b+c+\partial}, \quad \frac{\partial}{a+b+c+\partial}.$$

Складывая первыя двѣ изъ этихъ дробей, получаемъ въ суммѣ дробь

$$\frac{a+b}{a+b+c+\partial},$$

равную вѣроятности появленія бѣлаго шара съ № 1 или бѣлаго же съ № 2, т.-е. вѣроятность, что вынутъ шаръ бѣлаго цвѣта.

Подобнымъ же образомъ сумма

$$\frac{a}{a+b+c+\partial}+\frac{c}{a+b+c+\partial}=\frac{a+c}{a+b+c+\partial}$$

представляетъ вѣроятность, что на вынутомъ шарѣ стоитъ № 1.

Однимъ изъ слѣдствій теоремы сложенія вѣроятностей можно считать такое положеніе:

Сумма вѣроятностей событій единственно возможныхъ и несовмѣстимыхъ равна единицѣ.

Въ справедливости этого положенія можно убѣдиться непосредственно; для вывода же его изъ теоремы сложенія вѣроятностей достаточно замѣтить, что появленіе одного изъ единственно возможныхъ событій представляетъ событіе достовѣрное, вѣроятность котораго равна единицѣ.

Особенно важенъ случай двухъ единственно возможныхъ и несовмѣстимыхъ событій; такія событія мы будемъ называть *противоположными*.

Каждому событію соотвѣтствуетъ противоположное, состоящее въ непоявленіи перваго.

Въ прежнемъ примѣрѣ бѣлый и черный цвѣтъ вынутаго шара будутъ два противоположныхъ событія. Для появленія же бѣлаго шара съ № 1 противоположнымъ событіемъ будетъ появленіе чернаго шара или бѣлаго съ № 2.

Сумма вѣроятностей двухъ противоположныхъ событій составляетъ единицу; поэтому, имѣя вѣроятность p одного изъ нихъ, мы получимъ вѣроятность q другого, вычтя первую вѣроятность изъ единицы:

$$p+q=1,\ q=1-p,\ p=1-q.$$

Если событіе A достовѣрно, то противоположное ему невозможно; тогда вѣроятность событія A равна единицѣ, а вѣроятность противоположнаго ему равна нулю. Если же событіе A невозможно, то противоположное ему достовѣрно; тогда вѣроятность событія A равна нулю, а вѣроятность противоположнаго равна единицѣ.

Чѣмъ ближе вѣроятность событія къ единицѣ, тѣмъ больше имѣемъ мы основаній ожидать появленія такого событія и не ожидать противоположнаго событія.

Въ вопросахъ же практическаго характера мы можемъ быть вынуждены разсматривать событія, вѣроятность которыхъ болѣе или менѣе близка къ единицѣ, какъ достовѣрныя, и событія, вѣроятность которыхъ мала, какъ невозможныя.

Соотвѣтственно этому, одна изъ важнѣйшихъ задачъ исчисле-

нія вѣроятностей состоитъ въ разысканіи такихъ событій, вѣроятности которыхъ близки къ единицѣ или къ нулю.

§ 4. **Теорема умноженія вѣроятностей.**

Вѣроятность случиться двумъ событіямъ вмѣстѣ равна произведенію вѣроятности одного изъ нихъ на вѣроятность другого, вычисленную въ предположеніи, что первое имѣетъ мѣсто.

Доказательство.

Пусть изъ n единственно возможныхъ, несовмѣстимыхъ и равновозможныхъ случаевъ

$$C_1,\ C_2, \ldots,\ C_m,\ C_{m+1}, \ldots,\ C_{m_1},\ C_{m_1+1}, \ldots,\ C_n$$

благопріятствуютъ нѣкоторому событію A первые m_1 случаевъ

$$C_1,\ C_2, \ldots,\ C_m,\ C_{m+1}, \ldots,\ C_{m_1},$$

остальные же ему не благопріятствуютъ.

Пусть далѣе изъ случаевъ

$$C_1,\ C_2, \ldots,\ C_m,\ C_{m+1}, \ldots,\ C_{m_1}$$

первые m случаевъ

$$C_1,\ C_2, \ldots,\ C_m$$

благопріятствуютъ другому событію B, остальные же ему не благопріятствуютъ.

При такихъ условіяхъ вѣроятность событія A выражается дробью

$$\frac{m_1}{n}.$$

Вѣроятность же событія B, когда извѣстно существованіе событія A, выражается дробью

$$\frac{m}{m_1},$$

такъ какъ при существованіи событія A случаи

$$C_{m_1+1},\ C_{m_1+2}, \ldots,\ C_n$$

невозможны, а случаи

$$C_1,\ C_2, \ldots, C_{m_1}$$

остаются попрежнему равновозможными.

Наконецъ, вѣроятность появленія обоихъ событій A и B выражается дробью

$$\frac{m}{n},$$

такъ какъ оба событія A и B появляются только при случаяхъ

$$C_1,\ C_2, \ldots, C_m.$$

Замѣчая, что дробь

$$\frac{m}{n}$$

равна произведенію

$$\frac{m_1}{n} \cdot \frac{m}{m_1},$$

мы можемъ признать теорему умноженія вѣроятностей доказанною.

Для поясненія ея можетъ служить прежній примѣръ.

Въ этомъ примѣрѣ рѣчь шла о шарѣ, вынутомъ изъ сосуда, который содержитъ a бѣлыхъ шаровъ съ № 1, b бѣлыхъ съ № 2, c черныхъ съ № 1, $д$ черныхъ съ № 2 и не содержитъ никакихъ другихъ шаровъ.

Предполагая a, b, c, $д$ числами данными, мы установили для вѣроятности выхода бѣлаго шара величину

$$\frac{a+b}{a+b+c+д}.$$

Затѣмъ вѣроятность выхода шара съ № 1 выражается дробью

$$\frac{a+c}{a+b+c+д};$$

вѣроятность же выхода шара съ № 1, когда извѣстно, что онъ бѣлый, выражается дробью

$$\frac{a}{a+b}.$$

Помножая послѣднюю дробь на $\frac{a+b}{a+b+c+д}$, получаемъ величину

$$\frac{a+b}{a+b+c+д} \cdot \frac{a}{a+b} = \frac{a}{a+b+c+д},$$

равную вѣроятности, что вынутый шаръ бѣлый и съ № 1.

Ту же величину $\frac{a}{a+b+c+д}$ мы получимъ, если помножимъ дробь

$$\frac{a+c}{a+b+c+д},$$

равную вѣроятности выхода шара съ № 1, на дробь

$$\frac{a}{a+c},$$

которая выражаетъ вѣроятность, что вынутый шаръ бѣлаго цвѣта, когда извѣстно, что на немъ стоитъ № 1.

Считаемъ не лишнимъ выразить теорему умноженія вѣроятностей формулою:

(2) $$(AB) = (A)\,(B, A) = (B)\,(A, B),$$

гдѣ (AB) означаетъ вѣроятность появленія двухъ событій A и B вмѣстѣ, (A) и (B) означаютъ соотвѣтственно вѣроятности событій A и B, наконецъ, (B, A) означаетъ вѣроятность событія B, когда извѣстно существованіе A, и (A, B) означаетъ вѣроятность событія A, когда извѣстно существованіе B.

Теорема умноженія вѣроятностей можетъ быть слѣдующимъ образомъ распространена на случай многихъ событій:

Если, расположивъ нѣсколько событій въ любомъ порядкѣ, мы возьмемъ вѣроятность каждаго изъ нихъ въ предположеніи, что предыдущія имѣютъ мѣсто, то произведеніе всѣхъ этихъ вѣроятностей будетъ выражать вѣроятность случиться всѣмъ разсматриваемымъ событіямъ вмѣстѣ.

Соотвѣтственно этому можемъ написать формулу

$$(E_1 E_2 \ldots E_k) = (E_1)\,(E_2, E_1)\,(E_3, E_1 E_2) \ldots (E_k, E_1 E_2 \ldots E_{k-1}),$$

гдѣ $(E_1 E_2 \ldots E_k)$ означаетъ вѣроятность случиться всѣмъ событiямъ E_1, $E_2 \ldots E_k$ вмѣстѣ, символъ (E_1) означаетъ вѣроятность событiя E_1, и наконецъ подъ $(E_i, E_1 E_2 \ldots E_{i-1})$, при $i = 2, 3 \ldots k$, мы подразумѣваемъ вѣроятность событiя E_i, когда извѣстно существованiе событiй $E_1, E_2, \ldots E_{i-1}$.

Къ указанному обобщенiю теоремы умноженiя вѣроятностей мы можемъ придти, переходя послѣдовательно отъ случая двухъ событiй къ случаю трехъ, отъ случая трехъ къ случаю четырехъ событiй и т. д.

Для выясненiя хода разсужденiй достаточно показать, какимъ образомъ случай трехъ событiй сводится къ случаю двухъ событiй, такъ какъ подобнымъ же путемъ случай четырехъ событiй сводится къ случаю трехъ событiй и т. д.

Для того, чтобы существовали три событiя

$$E_1, E_2, E_3,$$

необходимо существованiе двухъ изъ нихъ.

Если разсматривать затѣмъ существованiе двухъ событiй E_1 и E_2, какъ одно событiе F, то существованiе трехъ событiй E_1, E_2, E_3 будетъ тождественно существованiю двухъ событiй F и E_3.

Поэтому, примѣняя два раза теорему умноженiя вѣроятностей для разсмотрѣннаго уже случая двухъ событiй, можемъ установить два равенства

$$(E_1 E_2 E_3) = (E_1 E_2)(E_3, E_1 E_2)$$

и

$$(E_1 E_2) = (E_1)(E_2, E_1),$$

изъ которыхъ тотчасъ выводимъ

$$(E_1 E_2 E_3) = (E_1)(E_2, E_1)(E_3, E_1 E_2).$$

Теорема умноженiя вѣроятностей упрощается въ одномъ важномъ случаѣ, когда дѣло идетъ о событiяхъ *независимыхъ*.

Нѣсколько событiй

$$E_1, E_2, \ldots, E_k$$

мы называемъ *независимыми* другъ отъ друга, если вѣроятность каждаго изъ нихъ не зависитъ отъ существованія или несуществованія остальныхъ, такъ что никакое указаніе на существованіе или несуществованіе какихъ-нибудь изъ событій

$$E_1, E_2, \ldots, E_k$$

не мѣняетъ вѣроятностей прочихъ.

Если событія

$$E_1, E_2, \ldots, E_k$$

не зависятъ другъ отъ друга, то вѣроятность каждаго изъ нихъ при существованіи предыдущихъ, разсматриваемая въ теоремѣ, совпадаетъ съ вѣроятностью того же событія, опредѣленною независимо отъ существованія или несуществованія другихъ.

Соотвѣтственно этому, примѣняя теорему умноженія вѣроятностей къ независимымъ событіямъ, мы можемъ придать ей слѣдующее болѣе простое выраженіе: *вѣроятность случиться нѣсколькимъ независимымъ событіямъ вмѣстѣ равна произведенію ихъ вѣроятностей.*

Примѣчаніе 1. Понятіе о независимыхъ событіяхъ можно считать вполнѣ яснымъ въ извѣстныхъ теоретическихъ вопросахъ; въ другихъ же вопросахъ это понятіе, конечно, можетъ совершенно затемняться вмѣстѣ съ затемненіемъ основного понятія о вѣроятности.

Примѣчаніе 2. Во многихъ случаяхъ зависимость или независимость событій другъ отъ друга можетъ обусловливаться не только сущностью этихъ событій, но и данными, при которыхъ разсматриваются ихъ вѣроятности.

Такіе случаи будутъ приведены въ шестой главѣ.

Теоремы о сложеніи и умноженіи вѣроятностей, въ связи съ вышеуказанной аксіомой, служатъ незыблимымъ основаніемъ для исчисленія вѣроятностей, какъ отдѣла чистой математики.

Въ однихъ случаяхъ онѣ даютъ намъ искомыя вѣроятности непосредственно; въ другихъ же случаяхъ доставляютъ урав-

ненія для разысканія вѣроятностей, существованіе которыхъ, какъ неизвѣстныхъ величинъ, мы должны предварительно допустить.

Литература.

Laplace. Théorie analytique des probabilités. 1812. 1886.

Lacroix. Traité élémentaire du calcul des probabilités. 1808.

Poisson. Recherches sur la probabilité des jugements, en matière criminelle et en matière civile. 1837.

Буняковскій. Основанія математической теоріи вѣроятностей. 1846.

Bertrand. Calcul des probabilités. 1889.

Poincaré. Calcul des probabilités. 1896. 1912.

Kries. Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Eine logische Untersuchung. Freiburg, 1896.

Stumpf. Ueber den Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit. (Berichte der bayrischen Akademie. 1892).

Goldschmidt. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Versuch einer Kritik. 1897.

Czuber. Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. 1899.

Czuber. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. 2te Auflage. 1910.

Bruns. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre 1906.

А. А. Чупровъ. Очерки по теоріи статистики. 1910.

М. Волковъ. Ученіе о вѣроятностяхъ. 1913.

ГЛАВА II.

О повторенiи испытанiй.

§ 5. Одна изъ важныхъ задачъ исчисленiя вѣроятностей состоитъ въ разсмотрѣнiи возможныхъ результатовъ нѣсколькихъ испытанiй, при каждомъ изъ которыхъ можетъ случиться нѣкоторое событiе E.

Условимся отличать эти испытанiя другъ отъ друга нумерами

$$1, 2, 3, \ldots$$

и будемъ обозначать буквою F, для каждаго изъ нихъ, событiе, противоположное событiю E.

Останавливаясь сначала на двухъ испытанiяхъ, мы можемъ различить четыре случая:

$$EE, EF, FE, FF.$$

Первый изъ этихъ случаевъ состоитъ въ появленiи событiя E при обоихъ испытанiяхъ; второй — въ появленiи E при первомъ испытанiи и непоявленiи E при второмъ испытанiи и т. д.

Прежде чѣмъ приступить къ разсмотрѣнiю вѣроятностей указанныхъ нами четырехъ случаевъ, установимъ понятiе о независимыхъ испытанiяхъ, которыми и будемъ исключительно заниматься.

Нѣсколько испытанiй мы называемъ *независимыми* по отношенiю къ событiю E, если вѣроятность событiя E при каждомъ изъ нихъ не зависитъ отъ результатовъ прочихъ; эти вѣроятности мы предполагаемъ, конечно, установленными соотвѣтственно нѣкоторымъ даннымъ, остающимся неизмѣнными.

Въ противномъ случаѣ мы назовемъ испытанія *связанными*.

Предполагая разсматриваемыя два испытанія независимыми, обозначимъ черезъ p_1 вѣроятность событія E при первомъ испытаніи, а черезъ p_2 вѣроятность событія E при второмъ испытаніи.

Тогда вѣроятность F при первомъ испытаніи будетъ выражаться разностью $1-p_1$, которую мы обозначимъ черезъ q_1; вѣроятность же событія F при второмъ испытаніи выразится разностью $1-p_2$, которую мы обозначимъ черезъ q_2.

При такихъ предположеніяхъ и обозначеніяхъ, пользуясь теоремой умноженія вѣроятностей, находимъ для вышеупомянутыхъ четырехъ случаевъ

$$EE,\ EF,\ FE,\ FF$$

соотвѣтственно слѣдующія вѣроятности

$$p_1 p_2,\ p_1 q_2,\ q_1 p_2,\ q_1 q_2.$$

Разсматривая затѣмъ второй и третій случаи какъ частные виды одного событія, состоящаго въ однократномъ появленіи событія E, заключаемъ, что вѣроятность однократнаго появленія событія E, при разсматриваемыхъ нами двухъ испытаніяхъ, выражается суммою

$$p_1 q_2 + q_1 p_2.$$

Итакъ, различая при двухъ испытаніяхъ три случая, изъ которыхъ первый состоитъ въ двукратномъ появленіи событія E, второй въ однократномъ его появленіи и третій въ совершенномъ непоявленіи событія E, мы находимъ для этихъ случаевъ такія вѣроятности:

$$p_1 p_2,\ p_1 q_2 + q_1 p_2,\ q_1 q_2.$$

Замѣтимъ, что эти три числа представляютъ соотвѣтственно коэффиціенты при ξ^2, ξ и ξ^0 въ разложеніи произведенія

$$(p_1 \xi + q_1)\,(p_2 \xi + q_2)$$

по степенямъ произвольнаго числа ξ.

Не трудно также видѣть, что сумма найденныхъ нами вѣроятностей

$$p_1 p_2,\ p_1 q_2 + q_1 p_2,\ q_1 q_2$$

составляетъ единицу, какъ и должно быть для вѣроятностей единственно возможныхъ и несовмѣстимыхъ событій.

Обращаясь къ тремъ испытаніямъ, мы можемъ различить восемь случаевъ, которые, подобно прежнимъ четыремъ, представимъ такъ:

$$EEE,\ EEF,\ EFE,\ FEE,\ EFF,\ FEF,\ FFE,\ FFF.$$

Предполагая три испытанія независимыми, присоединимъ къ прежнимъ обозначеніямъ

$$p_1,\ q_1,\ p_2,\ q_2,$$

которыя относятся къ первымъ двумъ испытаніямъ, соотвѣтственныя обозначенія

$$p_3,\ q_3$$

для вѣроятностей событія E и событія F при третьемъ испытаніи.

При такихъ условіяхъ вѣроятности вышеуказанныхъ восьми случаевъ выражаются, на основаніи теоремы умноженія вѣроятностей, произведеніями

$$p_1 p_2 p_3,\ p_1 p_2 q_3,\ p_1 q_2 p_3,\ q_1 p_2 p_3,\ p_1 q_2 q_3,\ q_1 p_2 q_3,\ q_1 q_2 p_3,\ q_1 q_2 q_3.$$

Затѣмъ мы можемъ разсматривать случаи 2ой, 3ій и 4ый какъ частные виды одного событія, состоящаго въ двукратномъ появленіи событія E; мы можемъ также разсматривать случаи 5ый, 6ой и 7ой какъ частные виды другого событія, состоящаго въ однократномъ появленіи событія E.

Тогда при помощи теоремы сложенія вѣроятностей найдемъ, что при трехъ испытаніяхъ вѣроятность событію E случиться два раза, а противоположному одинъ, представляется суммою

$$p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3;$$

вѣроятность же событію E случиться одинъ разъ, а противопо-

ложному два раза, представляется суммою

$$p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3.$$

Итакъ, различивъ при трехъ испытаніяхъ четыре случая, изъ которыхъ первый состоитъ въ трехкратномъ появленіи события E, второй въ двукратномъ, третій въ однократномъ его появленіи и, наконецъ, четвертый въ непоявленіи того же события E, мы находимъ для этихъ четырехъ случаевъ соотвѣтственно слѣдующія вѣроятности:

$$p_1 p_2 p_3, \quad p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3,$$

$$p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3, \quad q_1 q_2 q_3.$$

Замѣтимъ, что полученныя нами четыре числа равны коэффиціентамъ при ξ^3, ξ^2, ξ, ξ^0 въ разложеніи произведенія

$$(p_1 \xi + q_1)(p_2 \xi + q_2)(p_3 \xi + q_3)$$

по степенямъ произвольнаго числа ξ; сумма же ихъ составляетъ единицу.

Прежде чѣмъ перейти къ общимъ формуламъ для любого числа независимыхъ испытаній, поясним частнымъ примѣромъ разницу между независимыми и связанными испытаніями.

Положимъ, что мы вынимаемъ послѣдовательно нѣсколько шаровъ изъ сосуда, содержащаго a бѣлыхъ и b черныхъ шаровъ и не содержащаго никакихъ другихъ шаровъ.

Разсматривая затѣмъ выниманіе каждаго шара, какъ отдѣльное испытаніе, различимъ столько испытаній, сколько мы вынемъ шаровъ. Каждое испытаніе приводитъ къ появленію одного шара опредѣленнаго цвѣта; бѣлый цвѣтъ шара мы назовемъ событіемъ E, а черный событіемъ F.

Различимъ теперь два предположенія.

Сначала, чтобы имѣть примѣръ независимымъ испытаній, положимъ, что каждый вынутый шаръ тотчасъ возвращается обратно въ сосудъ для сохраненія неизмѣннымъ какъ числа бѣлыхъ, такъ и числа черныхъ шаровъ въ сосудѣ.

Тогда вѣроятность событія E сохраняетъ для каждаго испытанія одну и ту же величину

$$\frac{a}{a+b},$$

независимо отъ результатовъ прочихъ испытаній; такъ какъ каждый шаръ мы вынимаемъ изъ сосуда, содержащаго a бѣлыхъ и b черныхъ шаровъ.

Перейдемъ къ другому предположенію, при которомъ разсматриваемыя нами испытанія будутъ уже связанными, именно, положимъ, что вынутые шары не возвращаются обратно въ сосудъ. При такомъ предположеніи вѣроятность событія E для каждаго испытанія сохраняетъ прежнюю величину

$$\frac{a}{a+b}$$

до тѣхъ поръ, пока результаты прочихъ остаются неопредѣленными. И не трудно опредѣлить, какъ измѣняется эта вѣроятность по мѣрѣ выясненія результатовъ нѣкоторыхъ испытаній.

Напримѣръ, если извѣстно, что вынутъ одинъ бѣлый шаръ, то вѣроятность вынуть другой бѣлый шаръ выразится дробью

$$\frac{a-1}{a+b-1};$$

такъ какъ этотъ другой шаръ долженъ принадлежать къ совокупности $a+b-1$ шаровъ, содержащей $a-1$ бѣлыхъ и b черныхъ шаровъ. Если же извѣстно, что вынутъ одинъ черный шаръ, то вѣроятность, что какой-нибудь другой изъ вынутыхъ нами шаровъ бѣлый, выразится дробью

$$\frac{a}{a+b-1};$$

такъ какъ этотъ другой шаръ долженъ принадлежать къ совокупности $a+b-1$ шаровъ, содержащей a бѣлыхъ и $b-1$ черныхъ шаровъ.

И вообще, если среди вынутыхъ нами шаровъ извѣстно α бѣлыхъ и β черныхъ, то для каждаго изъ остальныхъ вѣроят-

ность, что онъ бѣлый, выразится дробью

$$\frac{a-\alpha}{a+b-\alpha-\beta};$$

такъ какъ этотъ шаръ долженъ принадлежать къ совокупности $a+b-\alpha-\beta$ шаровъ, содержащей $a-\alpha$ бѣлыхъ и $b-\beta$ черныхъ шаровъ.

§ 6. Обратимся къ общимъ формуламъ.

Теорема. *Если для n независимыхъ испытаній, которыя мы отличимъ другъ отъ друга нумерами*

$$1, 2, 3, \ldots, n,$$

вѣроятности событія E выражаются соотвѣтственно числами

$$p_1, p_2, \ldots, p_n,$$

то вѣроятность, что событіе E появится въ эти n испытаній ровно m разъ, можетъ быть опредѣлена, какъ коэффиціентъ при ξ^m въ разложеніи произведенія

$$(p_1 \xi + q_1)(p_2 \xi + q_2) \ldots (p_n \xi + q_n)$$

по степенямъ произвольнаго числа ξ, при чемъ

$$q_1 = 1 - p_1, \ q_2 = 1 - p_2, \ldots, \ q_n = 1 - p_n.$$

Для ознакомленія съ пріемами исчисленія вѣроятностей мы дадимъ два доказательства этой теоремы

Первое доказательство.

Событіе, вѣроятность котораго мы ищемъ и которое состоитъ въ появленіи E ровно m разъ при n испытаніяхъ, можно разбить на нѣсколько несовмѣстимыхъ видовъ. Каждый изъ этихъ видовъ состоитъ въ появленіи событія E при m опредѣленныхъ испытаніяхъ и непоявленіи E при остальныхъ $n-m$ испытаніяхъ.

Вѣроятность, что событіе E появится при m опредѣленныхъ испытаніяхъ и не появится при остальныхъ $n-m$ испытаніяхъ, опредѣляется по теоремѣ умноженія вѣроятностей.

Именно, въ силу этой теоремы вѣроятность, что событіе E

появится при испытаніяхъ, обозначенныхъ нумерами

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m,$$

и не появится при остальныхъ $n - m$ испытаніяхъ, выражается произведеніемъ

$$p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \ldots p_{\alpha_m} q_{\beta_1} q_{\beta_2} \ldots q_{\beta_{n-m}},$$

гдѣ

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-m}$$

нумера остальныхъ испытаній. Замѣтимъ, что произведеніе

$$p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \ldots p_{\alpha_m} q_{\beta_1} q_{\beta_2} \ldots q_{\beta_{n-m}}$$

можно получить изъ произведенія

$$q_1 q_2 \ldots q_n$$

черезъ замѣну множителей

$$q_{\alpha_1}, q_{\alpha_2}, \ldots, q_{\alpha_m}$$

множителями

$$p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots, p_{\alpha_m}.$$

Опредѣливъ вѣроятности каждаго изъ упомянутыхъ нами видовъ и сложивъ ихъ, согласно теоремѣ сложенія вѣроятностей получимъ искомую вѣроятность событію E появиться ровно m разъ.

Итакъ, вѣроятность, что въ разсматриваемыя нами n испытаній событіе E появится ровно m разъ, выражается суммою всѣхъ произведеній, которыя можно получить изъ одного

$$q_1 q_2 q_3 \ldots q_n$$

черезъ замѣну въ m мѣстахъ буквы q буквою p.

Тою же суммою, какъ извѣстно, выражается коэффиціентъ при ξ^m въ разложеніи произведенія

$$(p_1 \xi + q_1)(p_2 \xi + q_2) \ldots (p_n \xi + q_n)$$

по степенямъ произвольнаго числа ξ.

Такимъ образомъ теорема доказана.

Второе доказательство.

Подразумѣвая подъ буквою k любое изъ чиселъ

$$1, 2, \ldots, n,$$

а подъ буквою i любое изъ чиселъ

$$0, 1, 2, \ldots, k,$$

обозначимъ символомъ

$$P_{i,k}$$

вѣроятность, что въ k испытаній, отмѣченныхъ нумерами

$$1, 2, \ldots, k,$$

событіе E появится ровно i разъ.

Затѣмъ, вводя произвольное число ξ, положимъ

$$\varphi_k(\xi) = P_{0,k} + P_{1,k}\,\xi + P_{2,k}\,\xi^2 + \ldots + P_{k,k}\,\xi^k$$

и разсмотримъ рядъ функцій

$$\varphi_1(\xi),\ \varphi_2(\xi), \ldots,\ \varphi_{n-1}(\xi),\ \varphi_n(\xi).$$

Первая изъ нихъ $\varphi_1(\xi)$, очевидно, равна

$$p_1\,\xi + q_1.$$

Остальныя же можно опредѣлить послѣдовательно на основаніи такой общей формулы

$$\varphi_{k+1}(\xi) = (p_{k+1}\,\xi + q_{k+1})\,\varphi_k(\xi),$$

которую мы сейчасъ установимъ.

Для намѣченной цѣли выяснимъ связь между

$$P_{i,k+1},\ P_{i,k} \text{ и } P_{i-1,k}$$

при

$$0 < i < k+1$$

и обратимъ вниманіе на равенства

$$P_{k+1,k+1} = p_{k+1}\,P_{k,k} \quad \text{и} \quad P_{0,k+1} = q_{k+1}\,P_{0,k}.$$

При

$$0 < i < k+1$$

событіе, вѣроятность котораго обозначена символомъ

$$P_{i,\,k+1},$$

можно разбить на два вида въ зависимости отъ результата $k+1^{\text{го}}$ испытанія, которое можетъ сопровождаться появленіемъ или непоявленіемъ событія E.

Если при $k+1^{\text{мъ}}$ испытаніи событіе E имѣетъ мѣсто, то для того, чтобы общее число его появленій при $k+1$ испытаніяхъ, обозначенныхъ нумерами

$$1,\ 2, \ldots,\ k,\ k+1,$$

равнялось i, это событіе E должно появиться при k испытаніяхъ, обозначенныхъ нумерами

$$1,\ 2, \ldots,\ k,$$

ровно $i-1$ разъ. Если же при $k+1^{\text{мъ}}$ испытаніи событіе E не имѣетъ мѣста, то для того, чтобы общее число его появленій при $k+1$ испытаніяхъ, обозначенныхъ нумерами

$$1,\ 2, \ldots,\ k,\ k+1,$$

равнялось i, это событіе должно появиться при k испытаніяхъ, обозначенныхъ нумерами

$$1,\ 2, \ldots,\ k,$$

ровно i разъ.

По теоремѣ умноженія вѣроятностей вѣроятность перваго вида выражается произведеніемъ

$$p_{k+1}\, P_{i-1,\,k},$$

а вѣроятность второго — произведеніемъ

$$q_{k+1}\, P_{i,\,k}.$$

Слѣдовательно, въ силу теоремы сложенія вѣроятностей, имѣемъ

$$P_{i,\,k+1} = p_{k+1}\, P_{i-1,\,k} + q_{k+1}\, P_{i,\,k}.$$

Что касается равенствъ

$$P_{k+1,\,k+1} = p_{k+1}\, P_{k,\,k} \quad \text{и} \quad P_{0,\,k+1} = q_{k+1}\, P_{0,\,k},$$

то для ихъ вывода достаточно одной теоремы умноженія вѣроятностей.

Дѣйствительно, появленіе событія E при первыхъ $k+1$ испытаніяхъ $k+1$ разъ можно разсматривать, какъ существованіе двухъ событій, изъ которыхъ одно состоитъ въ появленіи E при $k+1^{мъ}$ испытаніи и имѣетъ вѣроятность p_{k+1}, а другое состоитъ въ появленіи E при первыхъ k испытаніяхъ k разъ и имѣетъ вѣроятность $P_{k,k}$. Поэтому произведеніе

$$p_{k+1} P_{k,k}$$

должно выражать вѣроятность событію E случиться въ первыя $k+1$ испытаній $k+1$ разъ, которая обозначена символомъ $P_{k+1,k+1}$. Произведеніе же

$$q_{k+1} P_{0,k}$$

выражаетъ вѣроятность, что событіе E не имѣетъ мѣста при $k+1^{мъ}$ испытаніи и не появляется ни разу при первыхъ k испытаніяхъ; а эта вѣроятность совпадаетъ съ вѣроятностью $P_{0,k+1}$, что въ первыя $k+1$ испытаній событіе E вовсе не появится.

Примѣняя указанныя нами формулы къ каждому изъ коэффиціентовъ выраженія

$$\varphi_{k+1}(\xi) = P_{0,k+1} + P_{1,k+1}\xi + P_{2,k+1}\xi^2 + \ldots + P_{k+1,k+1}\xi^{k+1},$$

получаемъ

$$\varphi_{k+1}(\xi) = \begin{cases} q_{k+1} P_{0,k} + q_{k+1} P_{1,k}\xi + \ldots + q_{k+1} P_{k,k}\xi^k \\ \qquad + p_{k+1} P_{0,k}\xi + \ldots + p_{k+1} P_{k-1,k}\xi^k + p_{k+1} P_{k,k}\xi^{k+1}, \end{cases}$$

откуда тотчасъ выводимъ

$$\varphi_{k+1}(\xi) = (q_{k+1} + p_{k+1}\xi)(P_{0,k} + P_{1,k}\xi + \ldots + P_{k,k}\xi^k),$$

что даетъ намъ вышеуказанную формулу

$$\varphi_{k+1}(\xi) = (p_{k+1}\xi + q_{k+1})\varphi_k(\xi),$$

такъ какъ, согласно принятымъ обозначеніямъ, имѣемъ

$$P_{0,k} + P_{1,k}\xi + P_{2,k}\xi^2 + \ldots + P_{k,k}\xi^k = \varphi_k(\xi).$$

Полагая k послѣдовательно равнымъ

$$1,\ 2,\ 3, \ldots, n-1,$$

получаемъ рядъ равенствъ

$$\varphi_2(\xi) = (p_2\xi + q_2)\,\varphi_1(\xi) = (p_2\xi + q_2)(p_1\xi + q_1),$$

$$\varphi_3(\xi) = (p_3\xi + q_3)\,\varphi_2(\xi),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_n(\xi) = (p_n\xi + q_n)\,\varphi_{n-1}(\xi),$$

откуда посредствомъ умноженія или простыхъ послѣдовательныхъ подстановокъ выводимъ формулу

$$(3) \qquad \varphi_n(\xi) = (p_1\xi + q_1)(p_2\xi + q_2)\ldots(p_n\xi + q_n),$$

равносильную теоремѣ.

§ 7. Остановимся на важномъ частномъ случаѣ доказанной нами теоремы; именно, на томъ случаѣ, когда извѣстныя намъ условія для всѣхъ испытаній одинаковы и когда соотвѣтственно этому всѣ вѣроятности

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

имѣютъ одну и ту же величину, которую мы обозначимъ просто буквою p. Тогда произведеніе

$$(p_1\xi + q_1)(p_2\xi + q_2)\ldots(p_n\xi + q_n)$$

обращается въ степень двучлена

$$(p\xi + q)^n,$$

гдѣ

$$q = 1 - p.$$

И, въ силу извѣстной формулы Ньютона, имѣемъ

$$(4) \qquad P_{m,n} = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)}\,p^m q^{n-m}.$$

Такъ выражается вѣроятность, что въ n независимыхъ испытаній событіе E появится ровно m разъ, если для каждаго испытанія, въ отдѣльности, вѣроятность этого событія равна p.

Выраженіе $P_{m,n}$, опредѣленное формулою (4), мы будемъ разсматривать при всѣхъ возможныхъ значеніяхъ m.

Такимъ образомъ получимъ рядъ чиселъ

$$P_{0,n}=q^n,\ P_{1,n}=\frac{n}{1}pq^{n-1},\ P_{2,n}=\frac{n(n-1)}{1.2}p^2q^{n-2},\ldots,\ P_{n,n}=p^n,$$

которыя послѣдовательно представляютъ вѣроятности, что число появленій событія E, при n испытаніяхъ, имѣетъ значенія

$$0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n.$$

При произвольно заданныхъ величинахъ p и n поставимъ себѣ цѣлью найти, для какого значенія m выраженіе

$$P_{m,n}=\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)}p^m q^{n-m}$$

достигаетъ своей наибольшей величины?

Это значеніе m мы назовемъ *наивѣроятнѣйшимъ* числомъ появленій событія E, такъ какъ ему соотвѣтствуетъ наибольшая вѣроятность $P_{m,n}$.

Для разысканія наивѣроятнѣйшаго числа появленій событія E сравнимъ между собою каждые два смежныхъ члена ряда

$$P_{0,n},\ P_{1,n},\ P_{2,n},\ldots,\ P_{n,n},$$

разсматривая ихъ отношеніе другъ къ другу.

Простое дѣленіе даетъ намъ равенство

$$\frac{P_{m+1,n}}{P_{m,n}}=\frac{n-m}{m+1}\frac{p}{q},$$

которое показываетъ, что отношеніе

$$\frac{P_{m+1,n}}{P_{m,n}}$$

убываетъ при возрастаніи числа m; отсюда вытекаютъ неравенства

$$\frac{P_{1,n}}{P_{0,n}}>\frac{P_{2,n}}{P_{1,n}}>\ldots>\frac{P_{n-1,n}}{P_{n-2,n}}>\frac{P_{n,n}}{P_{n-1,n}}.$$

Выдѣлимъ теперь два частныхъ предположенія. Пусть сначала

$$\frac{P_{1,n}}{P_{0,n}}\leqq 1.$$

Тогда въ силу указанныхъ нами неравенствъ каждая изъ дробей

$$\frac{P_{2,n}}{P_{1,n}}, \frac{P_{3,n}}{P_{2,n}}, \ldots, \frac{P_{n,n}}{P_{n-1,n}}$$

меньше единицы, и потому

$$P_{0,n} \geqq P_{1,n} > P_{2,n} > \ldots > P_{n-1,n} > P_{n,n}.$$

Съ другой стороны не трудно замѣтить, что неравенство

$$\frac{P_{1,n}}{P_{0,n}} \leqq 1$$

равносильно неравенству

$$\frac{np}{q} \leqq 1,$$

а это послѣднее приводится къ неравенству

$$n+1 \leqq \frac{1}{p}$$

посредствомъ простой замѣны числа q разностью $1-p$.

Такимъ образомъ мы убѣждаемся, что при

$$n+1 < \frac{1}{p}$$

наивѣроятнѣйшимъ числомъ появленій событія E, для разсматриваемыхъ нами n испытаній, будетъ 0. Если же

$$n+1 = \frac{1}{p},$$

то для разсматриваемыхъ нами n испытаній наивѣроятнѣйшимъ числомъ появленій событія E будетъ не только 0, но и 1, такъ какъ въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$P_{0,n} = P_{1,n} > P_{2,n} > \ldots > P_{n,n}.$$

Подобнымъ же образомъ, предполагая

$$(n+1)q \leqq 1,$$

приходимъ къ неравенству

$$\frac{P_{n,n}}{P_{n-1,n}} \geqq 1,$$

а затѣмъ выводимъ рядъ неравенствъ

$$P_{0,n} < P_{1,n} < P_{2,n} < \ldots . < P_{n-1,n} \leqq P_{n,n}.$$

Этотъ рядъ неравенствъ показываетъ, что при

$$n + 1 < \frac{1}{q}$$

наивѣроятнѣйшимъ числомъ появленій событія E, для разсматриваемыхъ нами n испытаній, будетъ n. Если же

$$n + 1 = \frac{1}{q},$$

то наивѣроятнѣйшимъ числомъ появленій событія E будетъ не только n, но и $n - 1$, такъ какъ въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$P_{0,n} < P_{1,n} < \ldots . < P_{n-1,n} = P_{n,n}.$$

Исключая указанныя два предположенія, положимъ теперь

$$n + 1 > \frac{1}{p} \quad \text{и} \quad n + 1 > \frac{1}{q}.$$

Тогда

$$\frac{P_{1,n}}{P_{0,n}} > 1, \text{ а } \frac{P_{n,n}}{P_{n-1,n}} < 1,$$

и слѣдовательно рядъ убывающихъ дробей

$$\frac{P_{1,n}}{P_{0,n}}, \ \frac{P_{2,n}}{P_{1,n}}, \ldots ., \ \frac{P_{n,n}}{P_{n-1,n}}$$

содержитъ какъ числа большія единицы, такъ и числа меньшія единицы. Отмѣчая переходъ отъ чиселъ большихъ единицы къ числамъ меньшимъ ея, положимъ

$$\frac{P_{1,n}}{P_{0,n}} > \frac{P_{2,n}}{P_{1,n}} > \ldots . > \frac{P_{\mu,n}}{P_{\mu-1,n}} > 1$$

$$1 \geqq \frac{P_{\mu+1,n}}{P_{\mu,n}} > \frac{P_{\mu+2,n}}{P_{\mu+1,n}} > \ldots . > \frac{P_{n,n}}{P_{n-1,n}}.$$

Эти неравенства равносильны слѣдующимъ:

$$P_{0,n} < P_{1,n} < P_{2,n} < \ldots < P_{\mu-1,n} < P_{\mu,n}$$

и

$$P_{\mu,n} \geqq P_{\mu+1,n} > P_{\mu+2,n} > \ldots > P_{n,n},$$

которыя обнаруживаютъ, что введенное нами число μ представляетъ наивѣроятнѣйшее число появленій событія E при разсматриваемыхъ нами n испытаніяхъ.

Наивѣроятнѣйшимъ числомъ появленій событія E можетъ, кромѣ μ, быть и $\mu + 1$, такъ какъ возможно равенство

$$P_{\mu,n} = P_{\mu+1,n}.$$

Для опредѣленія числа μ имѣемъ неравенства

$$\frac{P_{\mu,n}}{P_{\mu-1,n}} = \frac{n-\mu+1}{\mu}\,\frac{p}{q} > 1$$

и

$$\frac{P_{\mu+1,n}}{P_{\mu,n}} = \frac{n-\mu}{\mu+1}\,\frac{p}{q} \leqq 1,$$

изъ которыхъ выводимъ

$$(n-\mu+1)\,p > \mu q,\quad (n+1)\,p > \mu\,(p+q) = \mu$$

и

$$(n-\mu)\,p \leqq (\mu+1)\,q,\quad np - q \leqq \mu\,(p+q) = \mu;$$

слѣдовательно

$$np + p > \mu \geqq np - q.$$

Числа $np + p$ и $np - q$ отличаются другъ отъ друга только на одну единицу. Поэтому, если $np + p$ число дробное, то $np - q$ также число дробное и въ промежуткѣ

отъ $np - q$ до $np + p$

заключается только одно цѣлое число.

Тогда наивѣроятнѣйшимъ числомъ появленій событія E будетъ одно число μ, опредѣляемое неравенствами

$$np + p > \mu > np - q,$$

какъ цѣлое число, лежащее въ промежуткѣ

отъ $np - q$ до $np + p$.

Если же $np + p$ число цѣлое, то $np - q$ также число цѣлое, и нѣтъ никакого цѣлаго числа μ, которое удовлетворяло бы неравенствамъ

$$np + p > \mu > np - q.$$

Слѣдовательно въ этомъ случаѣ мы должны положить

$$\mu = np - q,$$

и наивѣроятнѣйшимъ числомъ появленій события E будетъ, кромѣ μ, также и число $\mu + 1$, равное $np + p$, такъ какъ при существованіи равенства

$$\mu = np - q$$

должно быть

$$P_{\mu,\,n} = P_{\mu+1\,n}.$$

Для примѣра положимъ

$$p = \frac{2}{5}$$

и дадимъ n послѣдовательно два значенія:

$$n = 4,\ n = 5.$$

При $n = 4$ сумма $np + p$ обращается въ цѣлое число 2, и потому мы должны имѣть не одно наивѣроятнѣйшее число появленій событія E, а два такихъ числа, одинаково вѣроятныя: $np + p = 2$ и $np - q = 1$; дѣйствительно имѣемъ

$$P_{0,4} = \frac{81}{625},\quad P_{1,4} = P_{2,4} = \frac{216}{625},\quad P_{3,4} = \frac{96}{625},\quad P_{4,4} = \frac{16}{625}.$$

При $n = 5$ сумма $np + p$ принимаетъ дробное значеніе $2 + \frac{2}{5}$, и цѣлое число μ, опредѣляемое неравенствами

$$np + p = 2 + \frac{2}{5} > \mu > np - q = 2 - \frac{3}{5},$$

равно 2. Соотвѣтственно этому наивѣроятнѣйшимъ числомъ по-

явленій событія E при $n=5$ должно быть 2; дѣйствительно имѣемъ

$$P_{0,5}=\frac{243}{3125},\quad P_{1,5}=\frac{810}{3125},\quad P_{2,5}=\frac{1080}{3125},\quad P_{3,5}=\frac{720}{3125},$$

$$P_{4,5}=\frac{240}{3125},\quad P_{5,5}=\frac{32}{3125}.$$

§ 8. Въ дальнѣйшихъ выводахъ мы будемъ предполагать число p постояннымъ, а n перемѣннымъ, которое можно увеличивать безпредѣльно.

И прежде всего замѣтимъ, что при такомъ предположеніи отношеніе наивѣроятнѣйшаго числа появленій событія E къ соотвѣтствующему числу испытаній должно приближаться къ предѣлу p, когда число испытаній n возрастаетъ безпредѣльно.

Въ самомъ дѣлѣ, наивѣроятнѣйшее число появленій событія E при n испытаніяхъ, по доказанному, не меньше $np-q$ и не больше $np+p$. Поэтому его отношеніе къ числу испытаній не меньше $p-\frac{q}{n}$ и не больше $p+\frac{p}{n}$. Числа же

$$p-\frac{q}{n} \text{ и } p+\frac{p}{n}$$

оба приближаются къ одному и тому же предѣлу p, когда n возрастаетъ безпредѣльно.

Слѣдовательно, при безпредѣльномъ возрастаніи числа испытаній, отношеніе наивѣроятнѣйшаго числа появленій событія E къ числу испытаній должно приближаться къ тому же предѣлу p.

Полученный нами выводъ относительно наивѣроятнѣйшаго числа появленій событія E не можетъ служить, отдѣльно взятый, основаніемъ для серьезныхъ заключеній о томъ, чего должно ожидать при многократномъ повтореніи испытаній, такъ какъ вѣроятность, что число появленій событія E точно равно своей наивѣроятнѣйшей величинѣ μ или $\mu+1$, приближается къ предѣлу нуль, когда число испытаній возрастаетъ безпредѣльно.

Разсматривая же вмѣстѣ съ наивѣроятнѣйшимъ и смежныя значенія числа появленій событія E и изслѣдуя ихъ вѣроятности, мы установимъ весьма важную *теорему Якова Бернулли.*

Теорема Бернулли.

Если имѣемъ неограниченный рядъ независимыхъ испытаній и для всѣхъ ихъ, въ отдѣльности, вѣроятность нѣкотораго событія E одинакова, то при достаточно большомъ числѣ этихъ испытаній будетъ сколь угодно близка къ достовѣрности, т. е. къ единицѣ, вѣроятность, что отношеніе числа появленій событія E къ числу испытаній сколь угодно мало отличается отъ вѣроятности событія E для каждаго изъ нихъ въ отдѣльности.

Иначе сказать, если p означаетъ вѣроятность событія E для каждаго испытанія, n число ихъ и m число появленій событія E, то при достаточно большихъ значеніяхъ n вѣроятность неравенствъ

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < +\varepsilon$$

будетъ больше $1-\eta$*, каковы бы ни были данныя положительныя числа* ε *и* η.

Извѣстно нѣсколько доказательствъ теоремы Бернулли.

Одно изъ нихъ принадлежитъ самому Якову Бернулли и изложено въ его сочиненіи «Ars conjectandi», которое издано въ 1713 г., послѣ смерти Якова Бернулли, его племянникомъ Николаемъ Бернулли. Мы не остановимся на этомъ замѣчательномъ элементарномъ, но довольно сложномъ, доказательствѣ и приведемъ здѣсь, съ небольшими измѣненіями, доказательство Лапласа, которое соединено съ выводомъ весьма употребительной приближенной формулы.

Выводя эту приближенную формулу, мы установимъ теорему о предѣлѣ вѣроятностей, которую назовемъ *теоремой Лапласа*.

§ 9. **Теорема Лапласа.**

Пусть n означаетъ число независимыхъ испытаній, p вѣроятность событія E для каждаго изъ нихъ, $q = 1 - p$ *вѣроятность противоположнаго событія, m — число появленій событія E при всѣхъ этихъ испытаніяхъ, наконецъ* t_1 *и* t_2 *— какія-нибудь два числа, при чемъ для опредѣленности положимъ* $t_2 > t_1$.

Если p, t_1 и t_2 *остаются безъ измѣненія, а n возрастаетъ*

безпредѣльно, то вѣроятность выполненія неравенствъ

$$np + t_1 \sqrt{2npq} < m < np + t_2 \sqrt{2npq}$$

приближается къ предѣлу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt.$$

Доказательство теоремы Лапласа.

Вѣроятность выполненія неравенствъ

$$np + t_1 \sqrt{2npq} < m < np + t_2 \sqrt{2npq}$$

ничто иное какъ вѣроятность, что число появленій событія E имѣетъ одно изъ значеній, лежащихъ въ промежуткѣ

$$\text{отъ } np + t_1 \sqrt{2npq} \text{ до } np + t_2 \sqrt{2npq}.$$

Поэтому ея вычисленіе, въ силу теоремы сложенія вѣроятностей, сводится къ опредѣленію всѣхъ возможныхъ значеній цѣлаго числа m, лежащихъ въ указанномъ промежуткѣ, затѣмъ къ вычисленію для каждаго изъ этихъ значеній m соотвѣтствующей вѣроятности, что число появленій событія E имѣетъ именно такое значеніе, и наконецъ къ сложенію всѣхъ этихъ вѣроятностей.

Съ другой стороны мы знаемъ, что вѣроятность каждаго опредѣленнаго значенія m выражается, согласно формулѣ (4), произведеніемъ

$$\frac{1.2.3\ldots.n}{1.2\ldots.m.1.2\ldots.(n-m)} p^m q^{n-m}.$$

Слѣдовательно, обозначивъ вѣроятность неравенствъ

$$np + t_1 \sqrt{2npq} < m < np + t_2 \sqrt{2npq}$$

символомъ

$$\underset{np + t_1 \sqrt{2npq}}{\overset{np + t_2 \sqrt{2npq}}{Q}},$$

имѣемъ

$$\underset{np + t_1 \sqrt{2npq}}{\overset{np + t_2 \sqrt{2npq}}{Q}} = \Sigma P_{m,n},$$

гдѣ

$$P_{m,n} = \frac{1.2.3\ldots.n}{1.2\ldots.m.1.2\ldots.(n-m)} p^m q^{n-m},$$

а суммированіе Σ распространяется на всѣ значенія цѣлаго числа m, удовлетворяющія неравенствамъ

$$np + t_1 \sqrt{2npq} < m < np + t_2 \sqrt{2npq}.$$

Приступая къ разсмотрѣнію суммы

$$\Sigma P_{m,n},$$

положимъ

$$m = np + z\sqrt{2npq}$$

и такимъ образомъ введемъ вмѣсто цѣлаго числа m новое перемѣнное z, которое ограничено неравенствами

$$t_1 < z < t_2$$

и условіемъ, что $np + z\sqrt{2npq}$ должно быть числомъ цѣлымъ.

При безпредѣльномъ возрастаніи n всѣ значенія m, на которыя распространяется разсматриваемая нами сумма, возрастаютъ безпредѣльно вмѣстѣ съ соотвѣтствующими величинами

$$n - m = nq - z\sqrt{2npq}.$$

Поэтому при отысканіи предѣла суммы

$$\Sigma P_{m,n}$$

мы можемъ къ каждому изъ трехъ произведеній

$$1.2\ldots.n,\ 1.2\ldots.m,\ 1.2\ldots.(n-m)$$

примѣнить извѣстную формулу Стирлинга, въ силу которой имѣемъ

$$\text{предѣлъ} \left\{\frac{1.2\ldots.x}{\sqrt{2\pi x}\, x^x e^{-x}}\right\}_{x=\infty} = 1.$$

Замѣняя въ выраженіи

$$P_{m,n} = \frac{1.2.3\ldots.n}{1.2\ldots.m.1.2\ldots.(n-m)} p^m q^{n-m}$$

произведенія

$$1.2\ldots.n,\ 1.2\ldots.m,\ 1.2\ldots.(n-m),$$

согласно формулѣ Стирлинга, произведеніями

$$\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n},\ \sqrt{2\pi m}\, m^m e^{-m},\ \sqrt{2\pi(n-m)}\, (n-m)^{n-m} e^{-n+m},$$

получаемъ новое выраженіе

$$P'_{m,n} = \sqrt{\frac{2\pi n}{2\pi m\,.\,2\pi(n-m)}}\cdot\frac{n^n e^{-n} p^m q^{n-m}}{m^m e^{-m} (n-m)^{n-m} e^{-n+m}}$$

$$= \sqrt{\frac{n}{2\pi m (n-m)}}\left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}$$

и такимъ образомъ приходимъ къ новой суммѣ

$$\Sigma P'_{m,n},$$

которая распространяется на тѣ же значенія m, какъ и сумма

$$\Sigma P_{m,n}.$$

При достаточно большихъ значеніяхъ n, всѣ отношенія слагаемыхъ $P_{m,n}$ одной суммы къ соотвѣтствующимъ слагаемымъ $P'_{m,n}$ другой будутъ сколь угодно близки къ единицѣ. Поэтому

$$\text{предѣлъ}\left(\frac{\Sigma P_{m,n}}{\Sigma P'_{m,n}}\right)_{n=\infty} = 1$$

и слѣдовательно

$$\underset{n=\infty}{\text{предѣлъ}}\ \Sigma P_{m,n} = \underset{n=\infty}{\text{предѣлъ}}\ \Sigma P'_{m,n},$$

если только можно установить существованіе предѣла одной изъ этихъ суммъ, что и будетъ нами выполнено относительно $\Sigma P'_{m,n}$.

Выраженіе $P'_{m,n}$ можно разсматривать, какъ произведеніе двухъ множителей

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} \quad \text{и} \quad \left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}.$$

Останавливаясь сначала на второмъ изъ этихъ множителей,



положимъ

$$\left(\frac{m}{np}\right)^m \left(\frac{n-m}{nq}\right)^{n-m} = W$$

и разсмотримъ $\log W$ съ цѣлью доказать равенство

$$\text{предѣлъ}_{n=\infty} (\log W - z^2) = 0.$$

Въ силу равенствъ

$$m = np + z\sqrt{2npq} \quad \text{и} \quad n - m = nq - z\sqrt{2npq}$$

имѣемъ

$$\frac{m}{np} = 1 + \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2q}{p}} \quad \text{и} \quad \frac{n-m}{nq} = 1 - \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2p}{q}}.$$

Подставляя въ W эти выраженія $\frac{m}{np}$ и $\frac{n-m}{nq}$ черезъ z и принимая во вниманіе, что при достаточно большихъ значеніяхъ n всѣ значенія произведеній

$$\frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2q}{p}} \quad \text{и} \quad \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2p}{q}}$$

будутъ сколь угодно малыми, послѣдовательно получаемъ

$$\begin{aligned}
\log W = \; & m\log\left(1 + \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2q}{p}}\right) + (n-m)\log\left(1 - \frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2p}{q}}\right) \\
= \; & (np + z\sqrt{2npq})\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2q}{p}} - \frac{qz^2}{np} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{\sqrt{n^3}}\sqrt{\frac{8q^3}{p^3}} - \cdots\right) \\
& -(nq - z\sqrt{2npq})\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2p}{q}} + \frac{pz^2}{nq} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{\sqrt{n^3}}\sqrt{\frac{8p^3}{q^3}} + \cdots\right) \\
= \; & z\sqrt{2npq} - qz^2 + 2qz^2 + \ldots \\
& -z\sqrt{2npq} - pz^2 + 2pz^2 + \ldots
\end{aligned}$$

и наконецъ

$$\log W - z^2 = \frac{\alpha z^3}{\sqrt{n}} + \frac{\beta z^4}{n} + \frac{\gamma z^5}{\sqrt{n^3}} + \cdots,$$

такъ какъ

$$-q + 2q - p + 2p = q + p = 1.$$

Не составляя коэффиціентовъ

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma \ldots .$$

намѣченнаго нами разложенія

$$\log W - z^2$$

въ рядъ по степенямъ $\frac{1}{\sqrt{n}}$, мы по одному виду ряда можемъ заключить, что сумма его

$$\frac{\alpha z^3}{\sqrt{n}} + \frac{\beta z^4}{n} + \frac{\gamma z^5}{\sqrt{n^3}} + \ldots .$$

должна приближаться къ предѣлу нуль, когда n возрастаетъ безпредѣльно, а z остается въ данномъ промежуткѣ.

Итакъ, при безпредѣльномъ возрастаніи n разность

$$\log W - z^2$$

дѣйствительно приближается къ предѣлу нуль, и потому отношеніе

$$\frac{e^{z^2}}{W}$$

приближается къ предѣлу единица.

Обращаясь къ другому множителю выраженія $P'_{m,n}$, замѣтимъ, что разность каждыхъ двухъ смежныхъ значеній z имѣетъ одну и ту же величину, и условимся обозначать ее символомъ Δz.

Величина Δz опредѣляется тѣмъ соображеніемъ, что смежнымъ значеніямъ z должны соотвѣтствовать смежныя же значенія m, которыя отличаются другъ отъ друга на единицу.

Соотвѣтственно этому имѣемъ

$$m = np + z\sqrt{2npq},$$

$$m + 1 = np + (z + \Delta z)\sqrt{2npq},$$

$$m - 1 = np + (z - \Delta z)\sqrt{2npq},$$

и отсюда выводимъ

$$\Delta z = \frac{1}{\sqrt{2npq}}.$$

Разсматривая затѣмъ отношеніе

$$\frac{\Delta z}{\sqrt{\pi}} \text{ къ } \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}},$$

послѣдовательно получаемъ

$$\frac{\Delta z}{\sqrt{\pi}} : \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} = \sqrt{\frac{m}{np}\cdot\frac{n-m}{nq}}$$

$$= \left(1+\frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2q}{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1-\frac{z}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2p}{q}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

и отсюда заключаемъ, что при достаточно большихъ значеніяхъ n это отношеніе будетъ сколь угодно близко къ единицѣ, при всѣхъ разсматриваемыхъ нами величинахъ z.

Изъ доказаннаго нами слѣдуетъ, что при разысканіи предѣла суммы

$$\Sigma P'_{m,n}$$

мы можемъ вмѣсто

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} \quad \text{и} \quad \left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} = \frac{1}{W}$$

соотвѣтственно взять

$$\frac{\Delta z}{\sqrt{\pi}} \quad \text{и} \quad e^{-z^2}.$$

Мы получимъ такимъ образомъ вмѣсто $P'_{m,n}$ новое выраженіе

$$P''_{m,n} = \frac{\Delta z}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2},$$

отношеніе котораго къ $P'_{m,n}$, при достаточно большихъ значеніяхъ n, будетъ сколь угодно близко къ единицѣ для всѣхъ разсматриваемыхъ нами значеній z. И подобно равенству

$$\underset{n=\infty}{\text{предѣлъ}} \Sigma P_{m,n} = \underset{n=\infty}{\text{предѣлъ}} \Sigma P'_{m,n}$$

можемъ установить другое

$$\underset{n=\infty}{\text{предѣлъ}} \Sigma P'_{m,n} = \underset{n=\infty}{\text{предѣлъ}} \Sigma P''_{m,n},$$

при чемъ всѣ суммированія распространяются на одни и тѣ же значенія z. Обращаясь къ суммѣ

$$\Sigma P''_{m,n},$$

положимъ, что наименьшимъ возможнымъ значеніемъ z будетъ z_1, а наибольшимъ z_2. Тогда должно быть

$$z_1 - \Delta z < t_1 < z_1, \quad z_2 < t_2 < z_2 + \Delta z,$$

и совокупность разсматриваемыхъ нами значеній z представится ариѳметическою прогрессіею

$$z_1,\ z_1 + \Delta z,\ z_1 + 2\Delta z, \ldots,\ z_2 - \Delta z,\ z_2.$$

При безпредѣльномъ возрастаніи n разность

$$\Delta z = \frac{1}{\sqrt{2npq}},$$

каждыхъ двухъ смежныхъ значеній z, приближается къ предѣлу нуль, равно какъ и разности

$$z_1 - t_1 \quad \text{и} \quad t_2 - z_2,$$

которыя меньше, чѣмъ Δz, такъ что

$$\underset{n=\infty}{\text{предѣлъ}}\ \Delta z = 0, \quad \underset{n=\infty}{\text{предѣлъ}}\ z_1 = t_1, \quad \underset{n=\infty}{\text{предѣлъ}}\ z_2 = t_2.$$

На этомъ основаніи, въ силу извѣстныхъ предложеній объ опредѣленныхъ интегралахъ, не трудно заключить, что при безпредѣльномъ возрастаніи n сумма

$$\Sigma P''_{m,n},$$

равная

$$\frac{\Delta z}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-z_1^2} + e^{-(z_1+\Delta z)} + e^{-(z_1+2\Delta z)^2} + \ldots + e^{-z_2^2}\right],$$

приближается къ предѣлу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-z^2}\,dz;$$

а вмѣстѣ съ нею къ тому же предѣлу должны приближаться и другія двѣ суммы:

$$\Sigma P'_{m,n} \text{ и } \Sigma P_{m,n}.$$

Такимъ образомъ теорема Лапласа доказана.

Принимая же предѣлъ вѣроятности за приближенную ея величину, получаемъ приближенную формулу

$$(5) \qquad Q_{np+t_1\sqrt{2npq}}^{np+t_2\sqrt{2npq}} \mp \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-z^2}dz \text{ *)}.$$

Въ частности при

$$-t_1 = +t_2 = t$$

имѣемъ

$$(6) \qquad Q_{np-t\sqrt{2npq}}^{np+t\sqrt{2npq}} \mp \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{t} e^{-z^2}dz.$$

Примѣчаніе. Вмѣсто формулы (6) Лапласъ въ своемъ извѣстномъ сочиненіи «Théorie analytique des probabilités» установилъ другую приближенную формулу. Мы не станемъ выводить здѣсь формулы Лапласа, хотя въ извѣстныхъ случаяхъ она даетъ возможность вычислить вѣроятность значительно точнѣе, чѣмъ то можно сдѣлать по формуламъ (5) и (6). Мы не станемъ также заниматься оцѣнкою погрѣшности приближенныхъ формулъ (5) и (6).

§ 10. Доказательство теоремы Бернулли.

Задавъ по произволу два положительныхъ числа ε и η, покажемъ, что при достаточно большихъ значеніяхъ n вѣроятность неравенствъ

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < \varepsilon$$

больше $1-\eta$. Для этой цѣли станемъ, при нѣкоторой величинѣ t, разсматривать вѣроятность неравенствъ

$$np - t\sqrt{2npq} < m < np + t\sqrt{2npq},$$

*) Для отличія приближенныхъ равенствъ отъ точныхъ мы перечеркиваемъ обыкновенный знакъ равенства.

равносильныхъ неравенствамъ

$$-\frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}} < \frac{m}{n} - p < \frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}}.$$

По доказанному эта вѣроятность

$$\overset{np+t\sqrt{2npq}}{\underset{np-t\sqrt{2npq}}{Q}}$$

должна приближаться къ предѣлу

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-z^2}\,dz,$$

если t остается безъ измѣненія, а n возрастаетъ безпредѣльно.

Съ другой стороны извѣстно равенство

$$\int_0^\infty e^{-z^2}dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

которое показываетъ, что при достаточно большихъ значеніяхъ t разность

$$1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-z^2}\,dz$$

будетъ сколь угодно мала. Поэтому, разбивъ η на два положительныхъ слагаемыхъ η' и η'', т. е. положивъ

$$\eta = \eta' + \eta'' \quad \text{при} \quad \eta' > 0 \quad \text{и} \quad \eta'' > 0,$$

мы можемъ распорядиться числомъ t такъ, что будетъ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-z^2}dz = 1 - \eta'$$

и затѣмъ назначить число n_0 настолько большимъ, чтобы для всѣхъ значеній n, удовлетворяющихъ неравенству $n > n_0$,

разность

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-z^2}dz - \underset{np - t\sqrt{2npq}}{\overset{np + t\sqrt{2npq}}{Q}}$$

была меньше η''.

Придавъ такимъ образомъ числу t опредѣленное значеніе, установимъ кромѣ неравенства $n > n_0$ еще слѣдующее

$$n > \frac{2pqt^2}{\varepsilon^2}.$$

Тогда вѣроятность неравенствъ

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < +\varepsilon$$

будетъ больше вѣроятности неравенствъ

$$-\frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}} < \frac{m}{n} - p < \frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}},$$

такъ какъ

$$\varepsilon > \frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}}$$

и потому всѣ значенія m, удовлетворяющія неравенствамъ

$$-\frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}} < \frac{m}{n} - p < \frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}},$$

удовлетворяютъ и неравенствамъ

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < \varepsilon.$$

Вѣроятность же неравенствъ

$$-\frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}} < \frac{m}{n} - p < \frac{t\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}},$$

обозначенная символомъ

$$\underset{np - t\sqrt{2npq}}{\overset{np + t\sqrt{2npq}}{Q}},$$

больше

$$1 - \eta' - \eta'' = 1 - \eta.$$

Слѣдовательно, при всѣхъ значеніяхъ n, превосходящихъ

$$n_0 \text{ и } \frac{2pqt^2}{\varepsilon^2},$$

вѣроятность неравенствъ

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < +\varepsilon$$

больше

$$1 - \eta.$$

Такимъ образомъ теорема Бернулли доказапа.

Примѣчаніе. Изложенное нами доказательство теоремы Бернулли основано, между прочимъ, на существованіи такого числа n_0, что при всѣхъ, превосходящихъ его, значеніяхъ n разность

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt - \underset{np - t\sqrt{2npq}}{\overset{np + t\sqrt{2npq}}{Q}}$$

меньше выбраннаго нами числа η''.

Существованіе числа n_0 установлено теоремою Лапласа о предѣлѣ вѣроятности. Но мы не можемъ придать этому числу опредѣленнаго значенія, пока погрѣшность приближенныхъ формулъ (5) и (6) остается неизслѣдованной.

§ 11. Изъ теоремы Бернулли обыкновенно заключаютъ, что при безпредѣльномъ возрастаніи числа испытаній отношеніе числа появленій событія къ числу испытаній приближается къ вѣроятности событія при отдѣльныхъ испытаніяхъ. Подобное заключеніе нельзя однако признать безусловно правильнымъ не только для тѣхъ случаевъ, когда условія теоремы Бернулли не выполнены, но и для тѣхъ случаевъ, къ которымъ эта теорема вполнѣ примѣнима.

Условія теоремы Бернулли состоятъ въ независимости испытаній и въ постоянствѣ величины вѣроятности событія.

При этихъ условіяхъ, теорема Бернулли обнаруживаетъ невѣроятность значительныхъ отклоненій отношенія $\frac{m}{n}$ отъ p, при большихъ n. Но она не устраняетъ окончательно возможности такихъ отклоненій; и эти невѣроятныя отклоненія могутъ оказаться дѣйствительными.

Считаемъ полезнымъ замѣтить также, что изъ теоремы Бернулли нельзя выводить необходимости компенсаціи результатовъ однихъ испытаній результатами другихъ.

Именно, если для наблюденныхъ нами испытаній отношеніе числа появленій событія къ числу испытаній значительно отклоняется отъ величины вѣроятности событія, то отсюда нельзя заключать, что для послѣдующихъ испытаній подобное же отношеніе отклонится отъ той же вѣроятности въ другую сторону.

Такое заключеніе противорѣчило бы предположенію о независимости испытаній другъ отъ друга.

Въ силу этой независимости, каковы бы ни были извѣстные намъ результаты однихъ испытаній, они не могутъ измѣнить нашихъ заключеній о возможныхъ результатахъ другихъ испытаній. Напримѣръ, если вѣроятность событія равна $\frac{1}{2}$ и при двадцати испытаніяхъ оно не появилось ни разу, то при двадцать первомъ испытаніи мы имѣемъ одинаковое основаніе какъ ожидать такъ и не ожидать появленія этого событія до тѣхъ поръ, пока нѣтъ сомнѣнія въ независимости этихъ испытаній и въ правильности принятой нами величины вѣроятности $\frac{1}{2}$.

Литература.

Jacob Bernoulli. Ars Conjectandi. 1713.

Чебышевъ. Элементарное доказательство одного общаго предложенія теоріи вѣроятности. (Сочиненія П. Л. Чебышева. Т. I).

ГЛАВА III.

Законъ большихъ чиселъ.

§ 12. Приступая къ важнымъ обобщеніямъ предыдущихъ выводовъ, мы должны ввести новыя опредѣленія и понятія.

Положимъ, что значеніе нѣкоторой величины X совпадаетъ съ однимъ изъ чиселъ опредѣленной системы и что каждому числу этой системы соотвѣтствуетъ опредѣленная вѣроятность совпаденія съ нимъ значенія X. Пусть

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_\lambda, \ldots,\ x_l$$

всѣ возможныя значенія X и

$$p_1,\ p_2, \ldots,\ p_\lambda, \ldots,\ p_l$$

ихъ вѣроятности; такъ что p_λ представляетъ вѣроятность, что X имѣетъ значеніе x_λ.

При такихъ предположеніяхъ и обозначеніяхъ мы будемъ называть *математическимъ ожиданіемъ* величины X сумму

$$(7) \qquad p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_\lambda x_\lambda + \ldots + p_l x_l.$$

Итакъ, математическимъ ожиданіемъ величины мы называемъ сумму произведеній каждаго изъ возможныхъ ея значеній на соотвѣтствующую вѣроятность.

При установленіи этого опредѣленія можно предполагать, что всѣ возможныя значенія X различны другъ отъ друга.

Нетрудно однако замѣтить, что такое предположеніе можетъ быть замѣнено другимъ болѣе общаго характера; такъ какъ ничто не мѣшаетъ намъ каждый случай, которому соотвѣтствуетъ то или другое опредѣленное значеніе X, разбить на нѣсколько несовмѣстимыхъ между собой случаевъ, отличающихся другъ отъ друга не величиною X, а другими обстоятельствами.

Поэтому, опредѣляя математическое ожиданіе X какъ сумму

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_l x_l$$

произведеній каждаго изъ возможныхъ значеній X на его вѣроятность, мы должны предполагать только, что эти значенія опредѣляются единственно возможными и несовмѣстимыми случаями; такъ что каждому числу x_λ системы

$$x_1, x_2, \ldots, x_\lambda, \ldots x_l$$

соотвѣтствуетъ свой особый случай, вѣроятность котораго p_λ мы называемъ вѣроятностью значенія x_λ. Это простое замѣчаніе послужитъ впослѣдствіи для сокращенія вычисленій.

Для примѣра положимъ, что мы бросаемъ на горизонтальную плоскость двѣ обыкновенныя шестигранныя игральныя кости, на граняхъ которыхъ поставлены нумера 1, 2, 3, 4, 5, 6, и разсматриваемъ сумму вскрывшихся нумеровъ. Назвавъ одну кость первою, а другую второю и обозначивъ буквою Y вскрывшійся нумеръ первой кости, буквою Z вскрывшійся нумеръ второй кости и буквою X разсматриваемую нами сумму $Y+Z$, мы можемъ различить 36 единственно возможныхъ и несовмѣстимыхъ случаевъ, которые ясно представлены въ таблицѣ:

$X=1+1=2$, $X=1+2=3$, $X=1+3=4$, $X=1+4=5$, $X=1+5=6$, $X=1+6=7$,
$X=2+1=3$, $X=2+2=4$, $X=2+3=5$, $X=2+4=6$, $X=2+5=7$, $X=2+6=8$,
$X=3+1=4$, $X=3+2=5$, $X=3+3=6$, $X=3+4=7$, $X=3+5=8$, $X=3+6=9$,
$X=4+1=5$, $X=4+2=6$, $X=4+3=7$, $X=4+4=8$, $X=4+5=9$, $X=4+6=10$,
$X=5+1=6$, $X=5+2=7$, $X=5+3=8$, $X=5+4=9$, $X=5+5=10$, $X=5+6=11$,
$X=6+1=7$, $X=6+2=8$, $X=6+3=9$, $X=6+4=10$, $X=6+5=11$, $X=6+6=12$.

Такъ какъ всѣ эти случаи равновозможны, то вѣроятность каждаго изъ нихъ равна $\frac{1}{36}$ и математическое ожиданіе разсма-

триваемой суммы $Y + Z$ выражается, согласно опредѣленію, суммою

$$\frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{7}{36}$$
$$+ \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{7}{36} + \frac{8}{36}$$
$$+ \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{7}{36} + \frac{8}{36} + \frac{9}{36}$$
$$+ \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{7}{36} + \frac{8}{36} + \frac{9}{36} + \frac{10}{36}$$
$$+ \frac{6}{36} + \frac{7}{36} + \frac{8}{36} + \frac{9}{36} + \frac{10}{36} + \frac{11}{36}$$
$$+ \frac{7}{36} + \frac{8}{36} + \frac{9}{36} + \frac{10}{36} + \frac{11}{36} + \frac{12}{36},$$

которая равна 7. Вмѣсто 36 равновозможныхъ случаевъ мы можемъ различить, по величинѣ суммы X, 11 случаевъ:

$$X = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,$$

которымъ соотвѣтствуютъ такія вѣроятности

$$\frac{1}{36},\ \frac{2}{36},\ \frac{3}{36},\ \frac{4}{36},\ \frac{5}{36},\ \frac{6}{36},\ \frac{5}{36},\ \frac{4}{36},\ \frac{3}{36},\ \frac{2}{36},\ \frac{1}{36}.$$

Опредѣляя на этомъ основаніи математическое ожиданіе X, получаемъ то же число 7 подъ видомъ суммы

$$\frac{2}{36} + \frac{2.3}{36} + \frac{3.4}{36} + \frac{4.5}{36} + \frac{5.6}{36} + \frac{6.7}{36} + \frac{5.8}{36} + \frac{4.9}{36} + \frac{3.10}{36} + \frac{2.11}{36} + \frac{12}{36}.$$

Намъ придется разсматривать не одну величину X, а нѣсколько подобныхъ величинъ, при чемъ для большей ясности мы будемъ предполагать, что для каждой изъ нихъ совокупность возможныхъ ея значеній состоитъ изъ конечнаго числа различныхъ чиселъ. Подобно тому, какъ раньше важно было установить понятіе о независимыхъ событіяхъ и независимыхъ испытаніяхъ, такъ теперь важно установить понятіе *о независимыхъ величинахъ*.

Нѣсколько величинъ

$$X,\ Y,\ Z, \ldots\ W$$

мы будемъ называть *независимыми*, если для каждой изъ нихъ вѣроятность имѣть каждое опредѣленное значенiе не зависитъ отъ значенiя прочихъ величинъ. Въ противномъ случаѣ мы будемъ называть величины *связанными*.

Останавливаясь на случаѣ двухъ величинъ, положимъ, что

$$x_1,\ x_2, \ldots ,\ x_\lambda, \ldots ,\ x_l$$

всѣ возможныя, различныя между собой, значенiя X, а

$$y_1,\ y_2, \ldots ,\ y_\mu, \ldots ,\ y_m$$

всѣ возможныя, различныя между собой, значенiя Y.

Если величины X и Y не зависятъ другъ отъ друга, то каждому числу x_λ системы

$$x_1,\ x_2, \ldots ,\ x_\lambda, \ldots ,\ x_l$$

должно соотвѣтствовать опредѣленное число p_λ, представляющее вѣроятность, что X равно x_λ, каково бы ни было извѣстное или неизвѣстное значенiе Y, и каждому числу y_μ системы

$$y_1,\ y_2, \ldots ,\ y_m$$

должно соотвѣтствовать опредѣленное число q_μ, представляющее вѣроятность, что Y равно y_μ, каково бы ни было извѣстное или неизвѣстное значенiе X.

Примѣчанiе 1. Во избѣжанiе недоразумѣнiй замѣтимъ, что изъ независимости величинъ X и Y не вытекаетъ независимость X и какой нибудь функцiи обѣихъ величинъ X и Y, напримѣръ $X + Y$.

Для поясненiя положимъ, что каждая изъ независимыхъ величинъ X и Y можетъ имѣть два равновѣроятныхъ значенiя:

$$-1 \text{ и } +1.$$

Тогда сумма

$$X + Y$$

можетъ имѣть три различныхъ значенiя:

$$-2,\ 0,\ +2,$$

вѣроятности которыхъ представляются дробями

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4},$$

пока значенія X и Y остаются неизвѣстными.

Если же при неизвѣстномъ значеніи Y дано значеніе X, то изъ трехъ значеній суммы $X + Y$ остаются только два и эти два равновѣроятны. При $X = +1$ сумма $X + Y$ не можетъ имѣть значенія -2, другія же два возможныя ея значенія, 0 и $+2$, равновѣроятны; а при $X = -1$ сумма $X + Y$ не можетъ имѣть значенія $+2$, другія же два возможныя ея значенія, -2 и 0, равновѣроятны.

Примѣчаніе 2. Замѣтимъ также, что независимость величинъ можетъ быть обусловлена тѣми данными, при которыхъ разсматриваются вѣроятности ихъ возможныхъ значеній; такъ что при измѣненіи данныхъ зависимыя величины могутъ сдѣлаться независимыми и обратно.

Для поясненія этого замѣчанія приведемъ примѣръ, который покажетъ также, что независимость нѣсколькихъ величинъ не равносильна независимости каждыхъ двухъ изъ нихъ.

Пусть будутъ

$$X, Y, Z$$

три числа, связанныя равенствомъ

$$XY = Z.$$

Положимъ далѣе, что

$$X \text{ и } Y$$

не зависятъ другъ отъ друга, пока Z остается неопредѣленнымъ, и что для каждой изъ этихъ величинъ представляется два и только два равновозможныхъ значенія: $+1$ и -1.

Въ этомъ случаѣ независимыя величины X и Y перестанутъ быть независимыми, какъ только будетъ опредѣлено значеніе Z: при $Z = +1$ должно быть $X = Y$, а при $Z = -1$ должно быть $X + Y = 0$. Нетрудно видѣть также, что при неопредѣленномъ значеніи X величины Y и Z будутъ независимыми, а при неопредѣленномъ значеніи Y будутъ независимыми X и Z.

Итакъ, если ни одна изъ величинъ

$$X, Y, Z$$

не опредѣлена, то каждыя двѣ изъ нихъ не зависятъ другъ отъ друга; разсматриваемыя же вмѣстѣ

$$X, Y, Z$$

не представляютъ трехъ независимыхъ величинъ, такъ какъ онѣ связаны равенствомъ

$$Z = XY.$$

§ 13. Важное значеніе математическаго ожиданія обнаружится при разсмотрѣніи суммы многихъ независимыхъ величинъ.

Предварительно мы докажемъ нѣсколько простыхъ предложеній.

Теорема. *Математическое ожиданіе суммы равно суммѣ математическихъ ожиданій слагаемыхъ.*

Эта теорема относится къ какимъ угодно величинамъ, какъ къ независимымъ, такъ и къ связаннымъ.

Для доказательства ея положимъ, что значенія какихъ-нибудь величинъ

$$X, Y, Z, \ldots, W$$

опредѣляются единственно возможными и несовмѣстимыми случаями

$$E_1, E_2, \ldots, E_n.$$

Пусть вѣроятности этихъ случаевъ соотвѣтственно будутъ

$$p_1, p_2, \ldots, p_n;$$

пусть наконецъ система

$$x_k, y_k, z_k, \ldots, w_k$$

представляетъ значенія $X, Y, Z, \ldots, W$ для случая E_k, такъ что $X, Y, Z, \ldots, W$ принимаютъ соотвѣтственно значенія

$$x_1, y_1, z_1, \ldots, w_1,$$

если появляется E_1, значенія

$$x_2, y_2, z_2, \ldots, w_2,$$

если появляется E_2, — и т. д.

При такихъ условіяхъ и обозначеніяхъ математическія ожиданія величинъ $X, Y, \ldots, W$ выражаются соотвѣтственно суммами

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n, \; p_1 y_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_n y_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \; p_1 w_1 + p_2 w_2 + \ldots + p_n w_n.$$

Затѣмъ относительно суммы

$$X + Y + Z + \ldots + W$$

замѣчаемъ, что сообразно появленію событій

$$E_1, E_2, \ldots, E_n$$

она принимаетъ значенія

$$x_1 + y_1 + \ldots + w_1, \; x_2 + y_2 + \ldots + w_2, \ldots, \; x_n + y_n + \ldots + w_n.$$

Поэтому ея математическое ожиданіе выражается суммою

$$p_1(x_1 + y_1 + \ldots + w_1) + p_2(x_2 + y_2 + \ldots + w_2) + \ldots +$$
$$+ p_n(x_n + y_n + \ldots + w_n),$$

которая, очевидно, равна суммѣ

$$(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n) + (p_1 y_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_n y_n) +$$
$$+ \ldots + (p_1 w_1 + p_2 w_2 + \ldots + p_n w_n).$$

Итакъ, математическое ожиданіе суммы

$$X + Y + Z + \ldots + W$$

равно суммѣ математическихъ ожиданій слагаемыхъ

$$X, Y, Z, \ldots, W.$$

Употребляя для обозначенія математическаго ожиданія буквы м. о., можемъ выразить установленную теорему формулою

(8) $\quad$ м. о $(X + Y + \ldots W) =$ м. о. $X +$ м. о. $Y + \ldots +$ м. о. W.

Примѣръ примѣненія этой теоремы можетъ доставить раз-

смотрѣнная раньше сумма

$$Y + Z$$

вскрывшихся нумеровъ двухъ, брошенныхъ на удачу, шестигранныхъ костей съ нумерами

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

Въ данномъ случаѣ математическое ожиданіе каждой изъ величинъ Y и Z равно

$$1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2},$$

и потому математическое ожиданіе ихъ суммы $Y + Z$ должно приводиться къ 7, какъ и было найдено раньше.

Теорема. *Математическое ожиданіе произведенія независимыхъ величинъ равно произведенію ихъ математическихъ ожиданій.*

Эта теорема относится къ произведенію любого числа независимыхъ величинъ. Мы ограничимся разсмотрѣніемъ произведенія двухъ множителей, такъ какъ отъ произведенія двухъ множителей нетрудно перейти къ произведенію любого числа множителей, посредствомъ послѣдовательнаго прибавленія одного множителя за другимъ. Пусть система

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_\lambda, \ldots,\ x_l$$

представляетъ всѣ возможныя различныя значенія величины X, а система

$$y_1,\ y_2, \ldots,\ y_\mu, \ldots,\ y_m$$

представляетъ всѣ возможныя различныя значенія величины Y.

Если X и Y, какъ мы предполагаемъ, не зависятъ другъ отъ друга, то должны быть еще двѣ опредѣленныя системы чиселъ

$$p_1,\ p_2, \ldots,\ p_\lambda, \ldots,\ p_l$$

и

$$q_1,\ q_2, \ldots,\ q_\mu, \ldots,\ q_m,$$

гдѣ вообще p_λ представляетъ вѣроятность величинѣ X имѣть значеніе x_λ, какъ при извѣстномъ, такъ и при неизвѣстномъ зна-

ченіи Y, число же q_μ представляетъ вѣроятность величинѣ Y имѣть значеніе y_μ, какъ при извѣстномъ, такъ и при неизвѣстномъ значеніи X. Затѣмъ сумма

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_\lambda x_\lambda + \ldots + p_l x_l$$

будетъ математическимъ ожиданіемъ X, а сумма

$$q_1 y_1 + q_2 y_2 + \ldots + q_\mu y_\mu + \ldots + q_m y_m$$

будетъ математическимъ ожиданіемъ Y.

Приступая же къ опредѣленію математическаго ожиданія XY, мы можемъ различить lm единственно возможныхъ и несовмѣстимыхъ случаевъ, каждый изъ которыхъ опредѣляется совокупностью значеній обѣихъ величинъ X и Y. Слѣдующая таблица представляетъ наглядное перечисленіе этихъ случаевъ:

$X=x_1,\ Y=y_1$	$X=x_2,\ Y=y_1$	...	$X=x_\lambda,\ Y=y_1$	...	$X=x_l,\ Y=y_1$
$X=x_1,\ Y=y_2$	$X=x_2,\ Y=y_2$	...	$X=x_\lambda,\ Y=y_2$	...	$X=x_l,\ Y=y_2$
....		...		...	....
....		...		...	....
$X=x_1,\ Y=y_\mu$	$X=x_2,\ Y=y_\mu$	...	$X=x_\lambda,\ Y=y_\mu$	...	$X=x_l,\ Y=y_\mu$
....		...		...	....
....		...		...	....
$X=x_1,\ Y=y_m$	$X=x_2,\ Y=y_m$	...	$X=x_\lambda,\ Y=y_m$	...	$X=x_l,\ Y=y_m$.

Возьмемъ любой изъ этихъ случаевъ:

$$X = x_\lambda,\quad Y = y_\mu.$$

Его вѣроятность равна

$$p_\lambda\, q_\mu,$$

по теоремѣ умноженія вѣроятностей; произведеніе же

$$XY$$

принимаетъ въ этомъ случаѣ значеніе

$$x_\lambda\, y_\mu.$$

Поэтому, согласно опредѣленію, математическое ожиданіе

произведенія XY можетъ быть выражено суммою всѣхъ произведеній

$$p_\lambda\, q_\mu\, x_\lambda\, x_\mu,$$

гдѣ

$$\lambda = 1,\ 2, \ldots,\ l \quad \text{и} \quad \mu = 1,\ 2, \ldots,\ m.$$

Соединяя въ этой суммѣ тѣ слагаемыя, гдѣ λ имѣетъ одно и то же значеніе, можемъ разбить ее на l отдѣльныхъ суммъ вида

$$p_\lambda\, q_1\, x_\lambda\, y_1 + p_\lambda\, q_2\, x_\lambda\, y_2 + \ldots + p_\lambda\, q_m\, x_\lambda\, y_m,$$

для полученія которыхъ надо давать λ значенія

$$1,\ 2, \ldots,\ l.$$

Сумма же

$$p_\lambda\, q_1\, x_\lambda\, y_1 + p_\lambda\, q_2\, x_\lambda\, y_2 + \ldots + p_\lambda\, q_m\, x_\lambda\, y_m,$$

очевидно, равна произведенію $p_\lambda\, x_\lambda$ на сумму

$$q_1\, y_1 + q_2\, x_2 + \ldots + q_m\, y_m,$$

представляющую математическое ожиданіе Y. Слѣдовательно разсматриваемое нами математическое ожиданіе равно суммѣ

$$\begin{aligned} & p_1\, x_1\, (q_1\, y_1 + q_2\, y_2 + \ldots + q_m\, y_m) \\ & + p_2\, x_2\, (q_1\, y_1 + q_2\, y_2 + \ldots + q_m\, y_m) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + p_l\, x_l\, (q_1\, y_1 + q_2\, y_2 + \ldots + q_m\, y_m), \end{aligned}$$

которая тотчасъ приводится къ произведенію двухъ суммъ

$$p_1\, x_1 + p_2\, x_2 + \ldots + p_l\, x_l \quad \text{и} \quad q_1\, y_1 + q_2\, y_2 + \ldots + q_m\, y_m,$$

соотвѣтственно равныхъ математическому ожиданію X и математическому ожиданію Y. Итакъ, математическое ожиданіе произведенія двухъ независимыхъ величинъ равно произведенію ихъ математическихъ ожиданій:

(9) $$\text{м. о. } XY = \text{м. о. } X \times \text{м. о. } Y.$$

Отсюда уже не трудно заключить для любого числа независимыхъ величинъ, что математическое ожиданіе ихъ произведенія равно произведенію математическихъ ожиданій этихъ величинъ.

Въ частности, математическое ожиданіе произведенія независимыхъ величинъ должно приводиться къ нулю, если равно нулю математическое ожиданіе одной или нѣкоторыхъ изъ нихъ.

Лемма. *Если A означаетъ математическое ожиданіе величины U, всѣ значенія которой числа положительныя *), а t число произвольное, то вѣроятность неравенства*

$$U \leqq At^2$$

больше

$$1 - \frac{1}{t^2}.$$

Доказательство.

Пусть два ряда чиселъ

$$u_1, u_2, \ldots, u_\sigma, \ldots, u_s$$

и

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\sigma, \ldots, \omega_s$$

представляютъ, соотвѣтственно, совокупность всѣхъ возможныхъ значеній U и вѣроятности этихъ значеній, такъ что вѣроятность величинѣ U имѣть значеніе u_σ равна ω_σ. Одни изъ чиселъ

$$u_1, u_2, \ldots, u_s$$

больше At^2, другія меньше At^2 или равны этому числу.

Для опредѣленности положимъ, что числа

$$u_1, u_2, \ldots, u_i$$

не больше At^2, остальныя же

$$u_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_s$$

больше At^2. Тогда вѣроятность неравенства

$$U \leqq At^2$$

выразится суммою

$$\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_i,$$

согласно теоремѣ сложенія вѣроятностей, такъ какъ событіе, выражаемое этимъ неравенствомъ, можно разбить на несо-

*) Мы не разсматриваемъ мнимыхъ чиселъ.

вмѣстимые виды, выражаемые равенствами

$$U = u_1,\ U = u_2, \ldots,\ U = u_i.$$

Согласно той же теоремѣ сложенія вѣроятностей сумма

$$\omega_{i+1} + \omega_{i+2} + \ldots + \omega_s$$

представитъ вѣроятность неравенства

$$U > At^2.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$A = \omega_1 u_1 + \omega_2 u_2 + \ldots + \omega_i u_i + \omega_{i+1} u_{i+1} + \ldots + \omega_s u_s$$

и

$$1 = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_i + \omega_{i+1} + \ldots + \omega_s,$$

такъ какъ, во первыхъ, буквою A мы обозначили математическое ожиданіе величины U и, во вторыхъ, сумма вѣроятностей событій, единственно возможныхъ и несовмѣстимыхъ, должна приводиться къ единицѣ. Принимая же во вниманіе, что между значеніями U, какъ и между числами

$$\omega_1,\ \omega_2, \ldots,\ \omega_s,$$

нѣтъ отрицательныхъ чиселъ, согласно одному изъ условій леммы, и что всѣ числа

$$u_{i+1},\ u_{i+2}, \ldots,\ u_s$$

больше At^2, изъ равенства

$$A = \omega_1 u_1 + \omega_2 u_2 + \ldots + \omega_i u_i + \omega_{i+1} u_{i+1} + \ldots + \omega_s u_s$$

выводимъ послѣдовательно неравенства

$$A \geqq \omega_{i+1} u_{i+1} + \omega_{i+2} u_{i+2} + \ldots + \omega_s u_s,$$

$$A > At^2 (\omega_{i+1} + \omega_{i+2} + \ldots + \omega_s)$$

и наконецъ

$$\frac{1}{t^2} > \omega_{i+1} + \omega_{i+2} + \ldots + \omega_s.$$

Послѣднее неравенство показываетъ, что вѣроятность неравенства

$$U > At^2,$$

выражаемая суммою

$$\omega_{i+1}+\omega_{i+2}+\ldots+\omega_s,$$

меньше $\frac{1}{t^2}$. Слѣдовательно вѣроятность неравенства

$$U \leqq At^2$$

больше

$$1-\frac{1}{t^2},$$

ибо эта послѣдняя вѣроятность выражается суммою

$$\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_i,$$

которая равна

$$1-(\omega_{i+1}+\omega_{i+2}+\ldots+\omega_s).$$

Основываясь на доказанной леммѣ, нетрудно установить слѣдующее замѣчательное неравенство.

Неравенство Бьенэме — Чебышева.

Если для какихъ нибудь независимыхъ величинъ

$$X,\ Y,\ Z,\ldots,\ W$$

мы обозначимъ, соотвѣтственно, ихъ математическія ожиданія буквами

$$a,\ b,\ c,\ldots,\ l$$

и математическія ожиданія ихъ квадратовъ тѣми же буквами со значкомъ $_1$, *т. е. символами*

$$a_1,\ b_1,\ c_1,\ldots,\ l_1,$$

то при произвольномъ значеніи числа t разность

$$1-\frac{1}{t^2}$$

будетъ меньше вѣроятности, что сумма

$$X+Y+Z+\ldots+W$$

не выходитъ изъ предѣловъ

$$a+b+c+\ldots+l-t\sqrt{a_1-a^2+b_1-b^2+c_1-c^2+\ldots+l_1-l^2}$$

и

$$a+b+c+\ldots+l+t\sqrt{a_1-a^2+b_1-b^2+c_1-c^2+\ldots+l_1-l^2}.$$

Доказательство.

Полагая

$$U=(X+Y+Z+\ldots+W-a-b-c\ldots-l)^2$$

и обозначивъ буквою A математическое ожиданіе U, мы можемъ на основаніи только что доказанной леммы, заключить, что при любомъ значеніи числа t разность

$$1-\frac{1}{t^2}$$

меньше вѣроятности неравенства

$$(X+Y+Z+\ldots+W-a-b-c-\ldots-l)^2\leqq At^2,$$

которое равносильно совокупности двухъ неревенствъ

$$-t\sqrt{A}\leqq X+Y+Z+\ldots+W-a-b-c-\ldots-l\leqq t\sqrt{A}.$$

Съ другой стороны имѣемъ

$$U=(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2+\ldots+(W-l)^2$$
$$+2(X-a)(Y-b)+2(X-a)(Z-c)+\ldots,$$

откуда выводимъ

$$\text{м. о. } U=A=\text{м. о. }(X-a)^2+\text{м. о. }(Y-b)^2+\ldots+\text{м. о. }(W-l)^2$$
$$+2\,\text{м. о. }(X-a)(Y-b)+2\,\text{м. о. }(X-a)(Z-c)+\ldots$$

Разсматривая же въ отдѣльности слагаемыя послѣдней суммы, получаемъ

$$\text{м. о. }(X-a)^2=\text{м. о. }(X^2-2aX+a^2)=\text{м. о. }X^2-2a\cdot\text{м. о. }X+a^2$$
$$=a_1-2aa+a^2=a_1-a^2$$

$$\text{м. о. }(Y-b)^2=b_1-b^2,\ldots,\ \text{м. о. }(W-l)^2=l_1-l^2,$$
$$\text{м. о. }(X-a)(Y-b)=\text{м. о. }(X-a)\times\text{м. о. }(Y-b)=0,$$
$$\text{м. о. }(X-a)(Z-e)=\text{м. о. }(X-a)\times\text{м. о. }(Z-c)=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

такъ какъ величины

$$X-a,\ Y-b,\ Z-c,\ldots,\ W-l$$

не зависятъ другъ отъ друга и математическія ожиданія ихъ равны нулю. И на этомъ основаніи находимъ

$$A = \text{м. о. } U = a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 + \ldots + l_1 - l^2.$$

Наконецъ по замѣнѣ A суммою

$$a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 + \ldots + l_1 - l^2$$

легко обнаружить, что неравенства

$$-t\sqrt{A} < X + Y + Z + \ldots + W - a - b - c \ldots - l < t\sqrt{A}$$

выполняются въ тѣхъ и только въ тѣхъ случаяхъ, когда

$$X + Y + Z + \ldots + W$$

заключается между

$$a + b + c + \ldots + l - t\sqrt{a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + \ldots + l_1 - l^2}$$

и

$$a + b + c + \ldots + l + t\sqrt{a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + \ldots + l_1 - l^2}.$$

Слѣдовательно вѣроятность, что сумма

$$X + Y + Z + \ldots + W$$

заключается въ указанныхъ нами предѣлахъ

$$a + b + c + \ldots + l - t\sqrt{a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + \ldots + l_1 - l^2}$$

и

$$a + b + c + \ldots + l + t\sqrt{a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + \ldots + l_1 - l^2},$$

равна вѣроятности неравенства

$$(X + Y + Z + \ldots + W - a - b - c - \ldots - l)^2 \leqq t^2\,(a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + \ldots + l_1 - l^2)$$

и больше чѣмъ

$$1 - \frac{1}{t^2}.$$

Такимъ образомъ неравенство Бьенэме—Чебышева доказано.

Мы соединяемъ съ этимъ замѣчательнымъ, простымъ, неравенствомъ два имени Бьенэме и Чебышева по той причинѣ,

что оно впервые ясно высказано и доказано Чебышевымъ, но основная идея доказательства была значительно раньше указана Бьенэме, въ мемуарѣ котораго «Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés» (Compt. Rend, XXXVII, 1853. Jour. de Liouv. 2 série, XII, 1867) можно найти и самое неравенство, обставленное только нѣкоторыми частными предположеніями.

§ 14. **Обобщенная теорема Бернулли. Случаи Чебышева.**

Если математическія ожиданія квадратовъ независимыхъ величинъ

$$X, Y, Z, \ldots, W,$$

число которыхъ можно увеличивать безпредѣльно, всѣ не превосходятъ одного и того же числа; то при достаточно большомъ числѣ этихъ величинъ будетъ сколь угодно близкою къ достовѣрности вѣроятность, что ихъ средняя арифметическая отличается произвольно мало отъ средней арифметической ихъ математическихъ ожиданій.

Доказательство.

Сохраняя для математическихъ ожиданій величинъ

$$X, Y, Z, \ldots, W$$

и для математическихъ ожиданій ихъ квадратовъ

$$X^2, Y^2, Z^2, \ldots, W$$

прежнія обозначенія

$$a, b, c, \ldots, l$$

и

$$a_1, b_1, c_1, \ldots, l_1,$$

назовемъ число величинъ

$$X, Y, Z, \ldots, W$$

буквою S; такъ что ихъ средняя арифметическая выразится дробью

$$\frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S},$$

средняя же ариѳметическая ихъ математическихъ ожиданій выразится дробью
$$\frac{a+b+c+\ldots+l}{S}.$$

Затѣмъ обозначимъ буквою L то число, котораго не превосходятъ математическія ожиданія квадратовъ величинъ X, Y, $Z, \ldots$, W, такъ что
$$a_1 \leqq L,\; b_1 \leqq L,\; c_1 \leqq L, \ldots, l_1 \leqq L_1.$$

Взявъ наконецъ любыя два положительныхъ числа
$$\varepsilon \text{ и } \eta,$$
покажемъ, что при достаточно большихъ значеніяхъ S вѣроятность неравенствъ
$$-\varepsilon < \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S} - \frac{a+b+c+\ldots+l}{S} < \varepsilon$$
будетъ больше
$$1-\eta.$$

Для этой цѣли намъ послужитъ только что установленное неравенство Чебышева. При
$$t^2 = \frac{1}{\eta}$$
неравенство Чебышева показываетъ, что разность
$$1-\eta$$
меньше вѣроятности неравенствъ
$$-\sqrt{\frac{A}{\eta}} \leqq X+Y+Z+\ldots+W-a-b-c-\ldots-l \leqq \sqrt{\frac{A}{\eta}},$$
равносильныхъ неравенствамъ
$$\frac{-1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}} \leqq \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S} - \frac{a+b+c+\ldots+l}{S} \leqq \frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}},$$
гдѣ
$$A = a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 + \ldots + l_1 - l^2.$$

Но каждая изъ разностей
$$a_1 - a^2,\; b_1 - b^2,\; c_1 - c^2, \ldots, l_1 - l^2$$

не превосходитъ числа L, поэтому и отношеніе

$$\frac{A}{S}$$

не превосходитъ того же числа L, произведеніе же

$$\frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}}$$

не можетъ превосходить

$$\sqrt{\frac{L}{S\eta}}.$$

Слѣдовательно, если распорядимся числомъ S такъ, чтобы было

$$\sqrt{\frac{L}{S\eta}} < \varepsilon,$$

то числа

$$-\frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}} \quad \text{и} \quad +\frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}}$$

будутъ заключаться между

$$-\varepsilon \text{ и } +\varepsilon$$

и потому во всѣхъ случаяхъ, когда оправдываются неравенства

$$-\frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}} \leqq \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S} - \frac{a+b+c+\ldots+l}{S} \leqq \frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}},$$

будутъ имѣть мѣсто и неравенства

$$-\varepsilon < \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S} - \frac{a+b+c+\ldots+l}{S} < +\varepsilon.$$

При такихъ условіяхъ вѣроятность неравенствъ

$$-\varepsilon < \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S} - \frac{a+b+c+\ldots+l}{S} < +\varepsilon$$

будетъ, конечно, не меньше вѣроятности неравенствъ

$$-\frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S}} \leqq \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S} - \frac{a+b+c+\ldots+l}{S} < \frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{A}{S\eta}},$$

которая по доказанному больше чѣмъ $1-\eta$.

Итакъ, вѣроятность неравенствъ

$$-\varepsilon < \frac{X+Y+Z+\ldots\ldots+W}{S} - \frac{a+b+c+\ldots+l}{S} < +\varepsilon$$

будетъ больше чѣмъ $1-\eta$ при всѣхъ значеніяхъ S, удовлетворяющихъ неравенству

$$\sqrt{\frac{L}{S\eta}} < \varepsilon,$$

т. е. при

$$S > \frac{L}{\eta\varepsilon^2}.$$

Доказавъ такимъ образомъ обобщенную теорему Бернулли, обратимъ вниманіе на одно важное слѣдствіе ея.

Если математическія ожиданія квадратовъ независимыхъ величинъ

$$X, Y, Z, \ldots, W,$$

число которыхъ можно увеличивать безпредѣльно, всѣ не больше одного и того же числа, а математическія ожиданія самихъ величинъ

$$X, Y, Z, \ldots, W,$$

напротивъ, всѣ не меньше одного и того же положительнаго числа, то при достаточно большомъ числѣ этихъ величинъ, съ вѣроятностью сколь угодно близкою къ достовѣрности, мы должны ожидать, что сумма ихъ

$$X+Y+Z+\ldots+W$$

превзойдетъ любое данное число.

Пусть, въ самомъ дѣлѣ, кромѣ прежнихъ неравенствъ

$$a_1 \leqq L, b_1 \leqq L, c_1 \leqq L, \ldots, l_1 \leqq L$$

имѣемъ

$$a > C, b > C, c > C, \ldots, l > C, C > 0.$$

По доказанному, какія бы два положительныхъ числа ε и η мы ни взяли, при

$$S > \frac{L}{\eta\varepsilon^2}$$

вѣроятность неравенстъ

$$\frac{a+b+c+\ldots+l}{S} - \varepsilon < \frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S} < \frac{a+b+c+\ldots+l}{S} + \varepsilon$$

будетъ больше $1-\eta$. Вмѣстѣ съ тѣмъ, конечно, будетъ больше $1-\eta$ и вѣроятность одного неравенства

$$\frac{a+b+c+\ldots+l}{S}-\varepsilon<\frac{X+Y+Z+\ldots+W}{S},$$

которое вполнѣ равносильно слѣдующему

$$X+Y+Z+\ldots+W>a+b+c+\ldots+l-S\varepsilon.$$

Въ силу неравенствъ

$$a>C,\ b>C,\ c>C,\ldots,\ l>C$$

сумма

$$a+b+c+\ldots+l$$

больше SC и потому во всѣхъ случаяхъ, когда оправдывается неравенство

$$X+Y+Z+\ldots+W>a+b+c+\ldots+l-S\varepsilon$$

должно быть также

$$X+Y+Z+\ldots+W>S(C-\varepsilon).$$

Слѣдовательно вѣроятность послѣдняго неравенства также больше $1-\eta$. Остается принять во вниманіе, что при

$$\varepsilon<C$$

и при достаточно большихъ значеніяхъ S произведеніе

$$S(C-\varepsilon)$$

будетъ больше любого числа, и мы тотчасъ придемъ къ слѣдствію обобщенной теоремы Бернулли, высказанному выше.

§ 15. Нетрудно показать, что установленная ранѣе теорема Бернулли представляетъ частный случай обобщенной.

Желая предварительно вывести предложеніе извѣстное подъ именемъ *теоремы Пуассона* или *закона большихъ чиселъ* *), положимъ, что разсматривается неограниченный рядъ независимыхъ

---

*) По моему мнѣнію *закономъ большихъ чиселъ* слѣдуетъ называть совокупность всѣхъ обобщеній теоремы Бернулли (см. § 16).

испытаній, обозначенныхъ нумерами

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,$$

и что вѣроятности событія E при этихъ испытаніяхъ соотвѣтственно имѣютъ значенія

$$p_1, p_2, p_3, \ldots.$$

Далѣе свяжемъ съ разсматриваемыми испытаніями количества

$$X_1, X_2, X_3, \ldots.$$

такъ, чтобы сумма

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$$

при всякомъ n выражала число появленій событія E, при испытаніяхъ съ нумерами

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n.$$

Для этого, очевидно, слѣдуетъ для всякаго числа k системы натуральныхъ чиселъ

$$1,\ 2,\ 3, \ldots.$$

положить

$$X_k = 1,$$

если при испытаніи съ нумеромъ k появляется событіе E, и

$$X_k = 0$$

въ противномъ случаѣ. При такихъ условіяхъ отношеніе

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n},$$

представляющее среднюю ариѳметическую величинъ

$$X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n,$$

будетъ совпадать съ отношеніемъ числа появленій событія E, при испытаніяхъ съ нумерами

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n,$$

къ числу этихъ испытаній. Съ другой стороны нетрудно видѣть, что математическія ожиданія

$$X_k \text{ и } X_k^2$$

имѣютъ одно и то же значеніе

$$p_k \cdot 1 + (1 - p_k) \cdot 0 = p_k,$$

которое не больше единицы для всѣхъ значеній k.

Поэтому мы можемъ приложить къ величинамъ

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

обобщенную теорему Бернулли, замѣняя ихъ среднюю арифметическую равною ей величиною отношенія числа появленій событія E къ числу испытаній. Принимая наконецъ во вниманіе, что средняя арифметическая математическихъ ожиданій величинъ

$$X_1, X_2, X_3, \ldots \ldots X_n$$

равна средней арифметической соотвѣтственныхъ вѣроятностей событія E, приходимъ къ упомянутой нами *теоремѣ Пауссона*, иначе называемой *закономъ большихъ чиселъ.*

При достаточно большомъ числѣ независимыхъ испытаній слѣдуетъ, съ вѣроятностью сколь угодно близкою къ достовѣрности, ожидать, что отношеніе числа появленій событія къ числу испытаній будетъ сколь угодно близко къ средней арифметической вѣроятностей событія.

И неравенство Чебышева обнаруживаетъ, что при

$$n > \frac{1}{\varepsilon^2 \eta}$$

вѣроятность неравенствъ

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} < \varepsilon$$

будетъ больше

$$1 - \eta,$$

гдѣ m означаетъ число появленій событія E при разсматриваемыхъ n испытаніяхъ, а ε и η любыя два положительныхъ числа. Указанный нами предѣлъ для n можно уменьшить еще въ четыре раза, если принять во вниманіе, что ни одна изъ разностей

$$p_1 - p_1^2, p_2 - p_2^2, \ldots, p_n - p_n^2$$

не больше $\frac{1}{4}$. Въ частномъ случаѣ, когда всѣ вѣроятности

$$p_1, p_2, p_3, \ldots$$

имѣютъ одну и ту же величину p, законъ большихъ чиселъ обращается въ теорему Бернулли.

Получивъ такимъ образомъ теорему Бернулли какъ частный случай другихъ, мы вмѣстѣ съ тѣмъ можемъ установить нижеслѣдующее простое неравенство. Если n означаетъ число независимыхъ испытаній, p вѣроятность событія E для каждаго испытанія и m число появленій событія E, то вѣроятность неравенствъ

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < \varepsilon$$

будетъ больше

$$1 - \eta$$

при всѣхъ значеніяхъ n превосходящихъ

$$\frac{p - p^2}{\varepsilon^2 \eta} = \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 \eta},$$

каковы бы ни были положительныя числа ε и η. Взявъ, напримѣръ,

$$p = \frac{3}{5}, \ \varepsilon = \frac{1}{50}, \ \eta = 0{,}001,$$

находимъ, что при

$$n > \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}}{\left(\frac{1}{50}\right)^2 \cdot \frac{1}{1000}} = 600000$$

вѣроятность неравенствъ

$$-\frac{1}{50} < \frac{m}{n} - \frac{3}{5} < \frac{1}{50}$$

будетъ навѣрно больше

$$0{,}999.$$

Найденное нами число

$$600000,$$

конечно, слишкомъ велико; въ дѣйствительности же вѣроятность неравенствъ

$$-\frac{1}{50} < \frac{m}{n} - \frac{3}{5} < \frac{1}{50}$$

превосходитъ 0,999 при величинахъ n во много разъ меньшихъ чѣмъ 600000.

Яковъ Бернулли, разсматривая въ Ars conjectandi тотъ же примѣръ, получилъ вмѣсто 600000 число 25550. Выводъ Бернулли соединенъ съ предположеніемъ, что n дѣлится на 50; не трудно однако устранить это предположеніе, и небольшое видоизмѣненіе вычисленій Бернулли даетъ возможность не только сохранить число 25550 для всѣхъ значеній n, но и нѣсколько уменьшить его. Если же мы будемъ считать за истинную величину вѣроятности ея приближенное значеніе, опредѣленное по формулѣ (6), то для разысканія тѣхъ значеній n, при которыхъ вѣроятность неравенствъ

$$-\frac{1}{50} < \frac{m}{n} - \frac{3}{5} < \frac{1}{50}$$

больше 0,999 надо будетъ поступать слѣдующимъ образомъ.

Посредствомъ таблицы значеній интеграла

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-z^2} dz,$$

которая приложена въ концѣ книги, находимъ t по условію

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-z^2} dz = 0,999;$$

это значеніе t будетъ

$$2,3268$$

съ точностью до $\frac{1}{10000}$. Затѣмъ разсматриваемъ неравенство

$$t\sqrt{\frac{2pq}{n}} < \varepsilon = \frac{1}{50}$$

и отсюда получаемъ

$$n > \frac{2pqt^2}{\varepsilon^2} \doteq 1200 \times (2,3268)^2 \doteq 6497.$$

Этотъ результатъ не даетъ намъ права утверждать, что при

$$n > 6497$$

вѣроятность неравенствъ

$$-\frac{1}{50} < \frac{m}{n} - p < \frac{1}{50}$$

будетъ навѣрно больше 0,999. Но онъ можетъ служить указаніемъ, что разсматриваемая нами вѣроятность неравенствъ

$$-\frac{1}{50} < \frac{m}{n} - p < \frac{1}{50}$$

будетъ больше 0,999 уже при величинахъ n незначительно превосходящихъ 6497. Напримѣръ, при

$$n = 6520$$

вѣроятность неравенствъ

$$-\frac{1}{50} < \frac{m}{n} - \frac{3}{5} < \frac{1}{50}$$

дѣйствительно превосходитъ 0,999 (см. § 26).

§ 16. **Возможность дальнѣйшихъ обобщеній.**

Условія, которыми мы обставили, по примѣру Чебышева, обобщенную теорему Бернулли, называемую нами *закономъ большихъ чиселъ*, достаточны для ея существованія но не необходимы.

Разысканіе необходимыхъ и достаточныхъ условій, въ данномъ случаѣ, какъ и во многихъ другихъ, едва ли можетъ увѣнчаться успѣхомъ. Но я считаю важнымъ вполнѣ выяснить возможность распространенія закона большихъ чиселъ на многіе ряды величинъ

$$X,\ Y,\ Z, \ldots,$$

неудовлетворяющіе тому или другому изъ вышеприведенныхъ условій Чебышева. Законъ этотъ гласитъ: *при безпредѣльномъ возрастаніи числа величинъ*

$$X,\ Y, \ldots,\ W$$

вѣроятность, что отклоненіе средняго арифметическаго

$$\frac{X + Y + \ldots + W}{S},$$

величинъ $X, Y, \ldots, W$, *отъ средняго арифметическаго*

$$\frac{a + b + \ldots + l}{S},$$

ихъ математическихъ ожиданій, меньше любого даннаго положительнаго числа, приближается къ предѣлу, равному единицѣ. И прежде всего не трудно видѣть, что онъ имѣетъ мѣсто для всякаго неограниченнаго ряда величинъ

$$X,\ Y,\ Z, \ldots,$$

удовлетворяющаго условію

$$\text{пред.}_{S=\infty} \frac{\text{мат. ож. } (X + Y + \ldots + W - a - b - \ldots - l)^2}{S^2} = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если для достаточно большихъ значеній S имѣемъ

$$\frac{\text{мат. ож. } (X + Y + \ldots + W - a - b - \ldots - l)^2}{S^2} < \omega^2$$

и число ω можемъ брать сколь угодно малымъ, то вѣроятность неравенствъ

$$-\varepsilon < \frac{X + Y + \ldots + W}{S} - \frac{a + b + \ldots + l}{S} < +\varepsilon$$

будетъ, при тѣхъ же значеніяхъ S, больше

$$1 - \frac{\omega^2}{\varepsilon^2},$$

въ силу леммы § 13, и вмѣстѣ съ тѣмъ мы можемъ приравнять ω^2 произведенію

$$\varepsilon^2 \eta,$$

какъ бы малы ни были данныя положительныя числа ε и η.

Такимъ образомъ мы легко выясняемъ, что для достаточно большихъ значеній S вѣроятность неравенствъ

$$-\varepsilon < \frac{X + Y + \ldots + W}{S} - \frac{a + b + \ldots + l}{S} < +\varepsilon,$$

при вышеприведенномъ условіи, будетъ больше

$$1 - \eta,$$

какъ бы малы ни были заданныя положительныя числа ε и η.

Въ этомъ и состоитъ законъ большихъ чиселъ, приложимость

котораго къ разсматриваемому нами ряду величинъ

$$X,\ Y,\ Z,\ldots.$$

мы желали установить.

Если рядъ

$$X,\ Y,\ Z,\ldots.$$

состоитъ изъ независимыхъ величинъ, то

$$\text{мат. ож. } (X + Y + \ldots + W - a - b - \ldots - l)^2,$$

какъ извѣстно, приводится къ суммѣ

$$\text{м. ож. } (X-a)^2 + \text{м. ож. } (Y-b)^2 + \ldots + \text{м. ож. } (W-l)^2.$$

Отношеніе же послѣдней суммы къ S^2 имѣетъ предѣломъ нуль во всѣхъ случаяхъ, указанныхъ Чебышевымъ, для которыхъ въ ряду

$$\text{м. о. } (X-a)^2,\quad \text{м. о. } (Y-b)^2,\quad \text{м. о. } (Z-c)^2,\ldots.$$

нѣтъ произвольно большихъ чиселъ. Но не только въ этихъ случаяхъ, а и во многихъ другихъ; напримѣръ, если нѣтъ произвольно большихъ чиселъ въ ряду

$$\text{м. ож. } (X-a)^2,\quad \frac{\text{м. ож. } (Y-b)^2}{2^{1-\delta}},\quad \frac{\text{м. ож. } (Z-c)^2}{3^{1-\delta}},\ldots,$$

гдѣ δ какое нибудь положительное число, меньшее единицы. Дѣйствительно, если при неизмѣнномъ A имѣемъ

$$\text{м. ож. } (X-a)^2 < A$$
$$\text{м. ож. } (Y-b)^2 < A \cdot 2^{1-\delta}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\text{м. ож. } (W-l)^2 < AS^{1-\delta},$$

то

$$\text{м. о. } (X-a)^2 + \text{м. о. } (Y-b)^2 + \ldots + \text{м. о. } (W-l)^2 < AS^{2-\delta}$$

и слѣдовательно

$$\underset{S=\infty}{\text{пред.}} \frac{\text{м. о. } (X-a)^2 + \ldots + \text{м. о. } (W-l)^2}{S^2} \leqq \underset{S=\infty}{\text{пред.}} \frac{A}{S^\delta} = 0.$$

Если же рядъ

$$X,\ Y,\ Z,\ldots$$

не состоитъ исключительно изъ независимыхъ величинъ, то

$$\text{м. о. } (X + Y + \ldots + W - a - b - \ldots - l)^2,$$

вообще говоря, не приводится къ суммѣ S слагаемыхъ

$$\text{м. о. } (X - a)^2 + \text{м. о. } (Y - b)^2 + \ldots + \text{м. о. } (W - l)^2$$

но разнится отъ нея суммою $\frac{S(S-1)}{2}$ членовъ

$$2\,\text{м. о.} (X - a)(Y - b) + \ldots + 2\,\text{м. о.} (X - a)(W - l) + \ldots,$$

къ которымъ нельзя примѣнять теорему о равенствѣ математическаго ожиданія произведенія произведенію математическихъ ожиданій, установленную только для независимыхъ величинъ.

Поэтому отношеніе

$$\frac{\text{мат. ож. } (X + Y + \ldots + W - a - b - \ldots - l)^2}{S^2}$$

можетъ не приближаться къ предѣлу нуль, при безпредѣльномъ возрастаніи S, даже въ тѣхъ случаяхъ, когда числовыя величины всѣхъ разностей

$$X - a, \quad Y - b, \quad Z - c, \ldots$$

не превосходятъ одного и того же постояннаго числа и, слѣдовательно, математическія ожиданія всѣхъ выраженій

$$(X - a)^2, \ (X - a)(Y - b), \ (Y - b)^2, \ (X - a)(Z - c), \ldots$$

не превосходятъ квадрата того же числа. Къ такимъ случаямъ законъ большихъ чиселъ не примѣняется. Въ самомъ дѣлѣ, если для всѣхъ S отношеніе

$$\frac{\text{мат. ож. } (X + Y + \ldots + W - a - b - \ldots - l)^2}{S^2}$$

остается больше одного и того же положительнаго числа G, числовыя же величины разностей

$$X - a, \quad Y - b, \quad Z - c, \ldots$$

не превосходятъ другого положительнаго числа H, то, обозначивъ

буквою p вѣроятность выполненія неравенства

$$\left\{\frac{X+Y+\ldots+W}{S}-\frac{a+b+\ldots+l}{S}\right\}^2>\varepsilon^2,$$

для любого даннаго числа ε, мы легко можемъ установить неравенство

$$G<\varepsilon^2+H^2p.$$

Отсюда же, при

$$\varepsilon^2<G,$$

слѣдуетъ, что вѣроятность невыполненія неравенствъ

$$-\varepsilon\leqq\frac{X+Y+\ldots+W}{S}-\frac{a+b+\ldots+l}{S}\leqq+\varepsilon$$

всегда остается больше положительнаго числа

$$\frac{G-\varepsilon^2}{H^2}$$

и потому не можетъ быть сколь угодно малою.

Отмѣтивъ такимъ образомъ существованіе рядовъ связанныхъ величинъ

$$X,\ Y,\ Z,\ldots,$$

къ которымъ законъ большихъ чиселъ не примѣняется, мы не станемъ на нихъ останавливаться, а перейдемъ къ указанію другихъ рядовъ, къ которымъ онъ, напротивъ, примѣняется.

Мы можемъ указать здѣсь три категоріи подобныхъ рядовъ. Первую категорію мы образуемъ изъ рядовъ, каждый членъ которыхъ связанъ только съ опредѣленнымъ, повсюду однимъ и тѣмъ же, числомъ ближайшихъ членовъ, такъ что любые два члена представляютъ независимыя величины, если они стоятъ, въ ряду, достаточно далеко другъ отъ друга. Для рядовъ, принадлежащихъ къ этой категоріи, большая часть слагаемыхъ суммы

$$2\text{ м. о. }(X-a)(Y-b)+\ldots+2\text{ м. о. }(X-a)(W-l)+\ldots$$

приводится къ нулю и отношеніе числа слагаемыхъ ея, отличныхъ отъ нуля, къ S должно оставаться конечнымъ.

Поэтому достаточно всѣмъ математическимъ ожиданіямъ

квадратовъ разностей

$$X - a, \quad Y - b, \quad Z - c, \ldots.$$

и произведеній тѣхъ же разностей, взятыхъ по двѣ, быть меньшими одного неизмѣннаго числа, чтобы отношеніе

$$\frac{\text{мат. ож. } (X + Y + \ldots + W - a - b - \ldots - l)^2}{S^2}$$

стремилось къ предѣлу нуль, вмѣстѣ съ $\frac{1}{S}$, и примѣнимость закона большихъ чиселъ къ разсматриваемому ряду величинъ

$$X, Y, Z, \ldots$$

не подлежала сомнѣнію.

Приведемъ простой примѣръ. Положимъ, что производится неограниченный рядъ испытаній, независимыхъ по отношенію къ нѣкоторому событію E; пусть вѣроятность E при первомъ испытаніи равна p_1, при второмъ p_2, при третьемъ p_3 и т. д.: рядъ чиселъ

$$p_1, p_2, p_3, \ldots$$

данъ. Пусть, наконецъ, число X связано съ результатами первыхъ двухъ испытаній такъ, что

$$X = 1,$$

если оба эти испытанія сопровождаются появленіемъ событія E, и

$$X = 0$$

въ противномъ случаѣ, когда по крайней мѣрѣ одно изъ первыхъ двухъ испытаній не сопровождается появленіемъ событія E; также связано число Y со вторымъ и третьимъ испытаніемъ, число Z съ третьимъ и четвертымъ и т. д.

Иначе сказать, сумма

$$X + Y + \ldots + W$$

выражаетъ у насъ число комбинацій

$$EE,$$

появляющихся при $S + 1$ послѣдовательныхъ испытаній.

Въ данномъ случаѣ каждый членъ ряда

$$X, Y, Z \ldots .$$

связанъ только съ непосредственно смежными: X только съ Y, Y только съ X и Z и т. д. Соотвѣтственно этому въ суммѣ

$$2 \text{ м. о. } (X-a)(Y-b)+\ldots+2 \text{ м. о. } (X-a)(W-l)+\ldots,$$

состоящей изъ $\frac{S(S-1)}{2}$ слагаемыхъ, только $S-1$ слагаемыхъ не равны нулю.

Для вычисленія этихъ $S-1$ слагаемыхъ и ихъ суммы, останавливаемся на первомъ изъ нихъ

$$2 \text{ м. о. } (X-a)(Y-b).$$

На основаніи простого тождества

$$(X-a)(Y-b)=XY-aY-bX+ab$$

имѣемъ

$$\text{м. о. } (X-a)(Y-b)=\text{м. о. } XY-ab;$$

это равенство относится ко всякимъ величинамъ X и Y.

Принимая же во вниманіе, что разсматриваемыя нами теперь величины

$$X \text{ и } Y$$

не имѣютъ другихъ значеній, кромѣ единицы и нуля, и что равенства

$$X=1 \quad \text{и} \quad Y=1$$

соотвѣтствуютъ появленію комбинаціи

$$EE$$

въ результатѣ первой пары и второй пары испытаній, а равенство

$$XY=1$$

соотвѣтствуетъ результату

$$EEE$$

первыхъ трехъ испытаній, находимъ

$$a=\text{м. о. } X=p_1p_2, \quad b=\text{м. о. } Y=p_2p_3$$

$$\text{м. о. } XY=p_1p_2p_3.$$

Слѣдовательно

$$\text{м. о. } (X-a)(Y-b) = p_1 p_2 p_3 (1-p_2) = p_1 p_2 q_2 p_3$$

и на основанiи этого результата мы можемъ заключить, что разсматриваемая нами сумма

$$2\,\text{м.о.}(X-a)(Y-b) + \ldots + 2\,\text{м.о.}(X-a)(W-l) + \ldots$$

выражается суммою первыхъ $S-1$ членовъ ряда

$$2p_1p_2q_2p_3,\ 2p_2p_3q_3p_4,\ 2p_3p_4q_4p_5, \ldots$$

и потому не можетъ превосходить

$$\frac{1}{2}(S-1).$$

Что же касается суммы

$$\text{м. о. } (X-a)^2 + \text{м. о. } (Y-b)^2 + \ldots + \text{м. о. } (W-l)^2,$$

то, какъ не трудно видѣть, она выражается суммою первыхъ S членовъ ряда

$$p_1p_2(1-p_1p_2),\ p_2p_3(1-p_2p_3), \ldots$$

и не можетъ превосходить

$$\frac{1}{4}S.$$

Такимъ образомъ мы убѣждаемся, что къ данному ряду

$$X,\ Y,\ Z, \ldots$$

законъ большихъ чиселъ примѣняется, хотя этотъ рядъ не состоитъ исключительно изъ независимыхъ величинъ. Въ частности, если всѣ числа

$$p_1,\ p_2,\ p_3, \ldots$$

равны одному числу p, можно написать для нашего примѣра такую простую формулу

$$\text{м. о. } (X+Y+\ldots+W-Sp^2)^2 = Sp^2(1-p^2) + (S-1)p^3q.$$

Вторую категорiю мы образуемъ изъ тѣхъ рядовъ

$$X,\ Y,\ Z, \ldots,\ V,\ W, \ldots,$$

для которыхъ математическія ожиданія всѣхъ произведеній

$$XY,\ XZ,\ YZ, \ldots .$$

или только математическія ожиданія произведеній

$$XY,\ (X+Y)Z, \ldots,\ (X+Y+\ldots+V)W, \ldots$$

меньше соотвѣтствующихъ произведеній математическихъ ожиданій. Въ этихъ случаяхъ

$$\text{м. о. } (X+Y+\ldots+W-a-b-\ldots-l)^2$$

меньше суммы

$$\text{м. о. } (X-a)^2+\text{м. о. } (Y-b)^2+\ldots+\text{м. о. } (W-l)^2$$

и потому для примѣнимости къ нимъ закона большихъ чиселъ достаточно, чтобы отношеніе

$$\frac{\text{м. о. } (X-a)^2+\text{м. о. } (Y-b)^2+\ldots+\text{м. о. } (W-l)^2}{S^2}$$

стремилось къ предѣлу нуль при безпредѣльномъ возрастаніи числа S.

Но наиболѣе заслуживаютъ вниманія ряды, которые мы причисляемъ къ третьей категоріи и характеризуемъ слѣдующимъ свойствомъ: съ увеличеніемъ разстоянія между величинами ряда связь ихъ, не прекращаясь совершенно, быстро убываетъ, такъ что сумма S слагаемыхъ

$$\text{м. о. } (W-l)(W-l)+\ldots+\text{м. о. } (W-l)(Y-b)+\text{м. о. } (W-l)(X-a),$$

при безпредѣльномъ возрастаніи числа S, не можетъ становиться произвольно большимъ положительнымъ числомъ, хотя бы число положительныхъ слагаемыхъ возрастало въ ней безпредѣльно вмѣстѣ съ S. Сюда принадлежатъ, между прочимъ, ряды называемые мною *связанными въ цѣпь*, которымъ посвящено нѣсколько моихъ статей.

Законъ большихъ чиселъ можетъ имѣть мѣсто и въ тѣхъ случаяхъ, когда отношеніе

$$\frac{\text{мат. ож. } (X+Y+\ldots+W-a-b-\ldots-l)^2}{S^2}$$

не стремится къ нулю, при безпредѣльномъ возрастаніи числа S, и даже когда

$$\text{мат. ож. } (X + Y + \ldots + W - a - b - \ldots - l)^2$$

оказывается безконечнымъ, при конечныхъ значеніяхъ S.

Для выясненія этого положенія остановимся на случаѣ независимыхъ величинъ, которыя для удобства разсужденій будемъ отличать другъ отъ друга не буквами, а нумерами.

Итакъ пусть будетъ

$$X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots, X_n, \ldots$$

неограниченный рядъ независимыхъ величинъ. Введемъ такія обозначенія

м. о. $X_k = a_k$, $\quad X_k - a_k = Z_k$, $\quad$ численное значеніе $Z_k = (Z_k)$.

Положимъ затѣмъ, что для нѣкотораго положительнаго числа δ, меньшаго единицы, существуютъ математическія ожиданія величинъ

$$(Z_1)^{1+\delta}, \quad (Z_2)^{1+\delta}, \ldots, \quad (Z_n)^{1+\delta}, \ldots$$

и что всѣ эти математическія ожиданія меньше одного и того же числа c. Установивъ такія условія и введя два произвольно заданныхъ положительныхъ числа

$$\varepsilon \text{ и } \eta,$$

мы докажемъ, что вѣроятность неравенствъ

$$-\varepsilon < \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) - \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) < +\varepsilon,$$

равносильныхъ неравенству

$$(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n)^2 < n^2 \varepsilon^2,$$

будетъ больше

$$1 - \eta,$$

при достаточно большихъ значеніяхъ n.

Для этой цѣли введемъ еще слѣдующія обозначенія. Различныя значенія Z_k будемъ обозначать символомъ z_k, числовыя

ихъ величины символомъ (z_k), а вѣроятность равенства

$$Z_k = z_k$$

символомъ p_k, вѣроятность же совокупности равенствъ

$$Z_1 = z_1, \quad Z_2 = z_2, \ldots, \quad Z_n = z_n$$

равную произведенію $p_1 p_2 \ldots p_n$ одною буквою P.

Наконецъ намъ придется различать суммы, распространенныя на всѣ значенія

$$z_1, \; z_2, \ldots, \; z_n,$$

отъ суммъ, распространенныхъ только на значенія тѣхъ же количествъ, ограниченныя нѣкоторыми добавочными условіями.

Употребляя для обозначенія всѣхъ этихъ суммъ одну и туже букву Σ, мы въ необходимыхъ случаяхъ будемъ указывать надъ ней ограничивающія условія, причемъ для краткости совокупность неравенствъ

$$z_1^2 < \nu^2, \quad z_2^2 < \nu^2, \ldots, \quad z_n^2 < \nu^2$$

будемъ изображать такъ

$$\ldots . z_k^2 \ldots . < \nu^2,$$

требованіе же нарушенія, по крайней мѣрѣ, одного изъ этихъ неравенствъ условимся представлять такъ

$$(\ldots . z_k^2 \ldots .) \geqq \nu^2.$$

При такихъ обозначеніяхъ имѣемъ

$$\sum P = \sum^{\ldots . z_k^2 \ldots . < \nu^2} P + \sum^{(\ldots . z_k^2 \ldots .) \geqq \nu^2} P = 1$$

$$\sum^{z_k^2 < \nu^2} p_k z_k = -\sum^{z_k^2 \geqq \nu^2} p_k z_k$$

$$\sum p_k (z_k)^{1+\delta} = \sum^{z_k^2 < \nu^2} p_k (z_k)^{1+\delta} + \sum^{z_k^2 \geqq \nu^2} p_k (z_k)^{1+\delta},$$

гдѣ ν вспомогательное число, которое мы будемъ увеличивать безпредѣльно вмѣстѣ съ n.

Затѣмъ не трудно установить рядъ простыхъ неравенствъ

$$\sum^{(\ldots z_k^2 \ldots) \geqq \nu^2} P \leqq \sum^{z_1^2 \geqq \nu^2} p_1 + \sum^{z_2^2 \geqq \nu^2} p_2 + \ldots + \sum^{z_n^2 \geqq \nu^2} p_n$$

$$\sum^{z_k^2 \geqq \nu^2} p_k \leqq \frac{1}{\nu^{1+\delta}} \sum^{z_k^2 \geqq \nu^2} p_k (z_k)^{1+\delta} \leqq \frac{c}{\nu^{1+\delta}}$$

$$\sum^{z_k^2 < \nu^2} p_k z_k^2 < \nu^{1-\delta} \sum^{z_k^2 < \nu^2} p_k (z_k)^{1+\delta} < c\nu^{1-\delta}$$

$$\text{числ. знач.} \sum^{z_k^2 < \nu^2} p_k z_k = \text{числ. знач.} \sum^{z_k^2 \geqq \nu^2} p_k z_k \leqq \frac{c}{\nu^\delta},$$

откуда выводимъ, что сумма

$$\sum^{\ldots z_k^2 \ldots < \nu^2} P (z_1 + z_2 + \ldots + z_n)^2,$$

не превосходящая

$$\sum^{z_1^2 < \nu^2} p_1 z_1^2 + \sum^{z_2^2 < \nu^2} p_2 z_2^2 + \ldots + \sum^{z_n^2 < \nu^2} p_n z_n^2$$

$$+ 2 \text{ числ. зн.} \sum^{z_1^2 < \nu^2} p_1 z_1 \cdot \sum^{z_2^2 < \nu^2} p_2 z_2 + \ldots,$$

меньше

$$nc\nu^{1-\delta} + \frac{n^2 c^2}{\nu^{2\delta}}$$

Слѣдовательно вѣроятность выполненія неравенства

$$(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n)^2 \geqq n^2 \varepsilon^2,$$

вмѣстѣ съ совокупностью неравенствъ

$$Z_1^2 < \nu^2, \quad Z_2^2 < \nu^2, \ldots, \quad Z_n^2 < \nu^2,$$

выражаемая суммою соотвѣтствующихъ значеній P, меньше

$$\frac{c\nu^{1-\delta}}{n\varepsilon^2} + \frac{c^2}{\nu^{2\delta} \varepsilon^2}$$

А такъ какъ, съ другой стороны, изъ приведенныхъ нами неравенствъ видно, что вѣроятность нарушенія, по крайней мѣрѣ,

одного изъ неравенствъ

$$Z_1^2 < \nu^2, \quad Z_2^2 < \nu^2, \ldots, \quad Z_n^2 < \nu^2$$

меньше

$$\frac{nc}{\nu^{1+\delta}},$$

то мы можемъ заключить, что вѣроятность одного неравенства

$$(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n)^2 > n^2 \varepsilon^2,$$

безъ обязательности неравенствъ

$$Z_1^2 < \nu^2, \quad Z_2^2 < \nu^2, \ldots, \quad Z_n^2 < \nu^2,$$

меньше суммы

$$\frac{c\nu^{1-\delta}}{n\varepsilon^2} + \frac{c^2}{\nu^{2\delta}\varepsilon^2} + \frac{nc}{\nu^{1+\delta}}.$$

Послѣдняя же сумма будетъ меньше любого даннаго числа η, при достаточно большихъ значеніяхъ n, если только мы распорядимся вспомогательнымъ числомъ ν такъ, чтобъ оба отношенія

$$\frac{\nu}{n} \text{ и } \frac{n}{\nu}$$

не превосходили заданной величины.

Полагая, напримѣръ,

$$\nu = n$$

находимъ, что вѣроятность неравенства

$$(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n)^2 > n^2 \varepsilon^2$$

должна быть меньше η для всѣхъ значеній n, удовлетворяющихъ неравенству

$$\left\{\frac{c}{\varepsilon^2} + \frac{c^2}{n^\delta \varepsilon} + c\right\}\frac{1}{n^\delta} < \eta.$$

Такимъ образомъ нами доказано, что къ разсматриваемому сейчасъ ряду величинъ

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

законъ большихъ чиселъ примѣняется, хотя бы математическое ожиданіе извѣстнаго квадрата

$$\frac{1}{n^2}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n - a_1 - a_2 \ldots - a_n)^2$$

имѣло произвольно большія значенія или даже обращалось въ безконечность при конечныхъ значеніяхъ n.

§ 17. Возвращаясь къ суммѣ

$$X + Y + Z + \dots + W$$

какихъ нибудь независимыхъ величинъ

$$X, Y, Z, \dots, W,$$

займемся выводомъ приближеннаго выраженія для вѣроятности, что эта сумма заключается въ предѣлахъ

$$a + b + c + \dots + l + t_1 \sqrt{2(a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + \dots + l_1 - l^2)}$$

и

$$a + b + c + \dots + l + t_2 \sqrt{2(a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + \dots + l_1 - l^2)},$$

гдѣ

$$a, b, c, \dots, l \text{ и } a_1, b_1, c_1, \dots, l_1$$

имѣютъ тотъ же смыслъ какъ и прежде, а t_1 и t_2 два произвольныхъ числа, при чемъ $t_2 > t_1$. Это замѣчательное выраженіе

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-z^2} dz$$

нами было уже указано при доказательствѣ теоремы Бернулли.

Тогда оно было получено для частнаго случая, соотвѣтствующаго теоремѣ Бернулли; а теперь мы выведемъ то же приближенное выраженіе вѣроятности для всѣхъ случаевъ.

Обозначимъ для краткости:

всѣ возможныя различныя значенія X одною буквою x,
———————————————— Y ———————— y,
———————————————— Z ———————— z,
. . . .
———————————————— W ———————— w,

а вѣроятности этихъ значеній буквами

$$\rho, \sigma, \tau, \dots, \omega.$$

Затѣмъ условимся обозначать буквою Σ такія суммы, которыя распространяются на всѣ значенія

$$x, y, z, \ldots, w$$

и соотвѣтствующія имъ величины

$$\rho, \sigma, \tau, \ldots, \omega;$$

для обозначенія же одной суммы, распространенной не на всѣ значенія

$$x, y, z, \ldots, w,$$

употребимъ символъ Σ'. При такихъ условіяхъ имѣемъ

$$\Sigma\rho = \Sigma\sigma = \Sigma\tau = \ldots = \Sigma\omega = 1,$$

$$\Sigma\rho x = a,\ \Sigma\sigma y = b,\ \Sigma\tau z = c, \ldots,\ \Sigma\omega w = l,$$

$$\Sigma\rho x^2 = a_1,\ \Sigma\sigma y^2 = b_1,\ \Sigma\tau z^2 = c_1, \ldots,\ \Sigma\omega w^2 = l_1,$$

и для каждой возможной системы чиселъ

$$x, y, z, \ldots, w$$

соотвѣтствующее произведеніе

$$\rho\sigma\tau \ldots \omega$$

будетъ выражать вѣроятность совокупности равенствъ

$$X = x,\ Y = y,\ Z = z, \ldots,\ W = w,$$

въ силу теоремы умноженія вѣроятностей, примѣненной къ независимымъ событіямъ. А изъ теоремы сложенія вѣроятностей нетрудно заключить, что вѣроятность неравенствъ

$$a+b+\ldots+l+t_1\sqrt{2A} < X+Y+\ldots+W < a+b+\ldots+l+t_2\sqrt{2A},$$

гдѣ

$$A = a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 + \ldots + l_1 - l^2,$$

представится суммою

$$\Sigma'\rho\sigma\tau \ldots \omega,$$

распространенною на тѣ значенія

$$x, y, z, \ldots, w,$$

которыя удовлетворяютъ неравенствамъ

$$t_1\sqrt{2A} < x+y+z+\ldots\ldots+w-a-b-c-\ldots\ldots-l < t_2\sqrt{2A},$$

или, что все равно, неравенствамъ

$$\frac{t_1-t_2}{2}\sqrt{2A} < x+y+\ldots\ldots+w-a-b-\ldots\ldots-l-\frac{t_1+t_2}{2}\sqrt{2A} < \frac{t_2-t_1}{2}\sqrt{2A}.$$

При помощи замѣчательнаго множителя Дирихле мы сведемъ эту сумму

$$\Sigma'\rho\sigma\tau\ldots\ldots\omega$$

къ другой, которая распространяется уже на всѣ значенія

$$x, y, z, \ldots, w.$$

Для полученія множителя Дирихле прежде всего замѣтимъ, что интегралъ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\alpha\xi}{\xi}d\xi,$$

гдѣ α число постоянное, имѣетъ значеніе $+1$ при $\alpha > 0$, значеніе -1 при $\alpha < 0$, и значеніе 0 при $\alpha = 0$.

Поэтому простое равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\beta\xi\operatorname{Cos}\gamma\xi}{\xi}d\xi = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}(\beta+\gamma)\xi}{\xi}d\xi + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}(\beta-\gamma)\xi}{\xi}d\xi$$

обнаруживаетъ, что интегралъ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\beta\xi\cdot\operatorname{Cos}\gamma\xi}{\xi}d\xi,$$

гдѣ β и γ числа постоянныя и $\beta > 0$, имѣетъ значеніе 1, если

$$-\beta < \gamma < \beta,$$

значеніе 0, если γ лежитъ внѣ предѣловъ

$$-\beta \text{ и } +\beta,$$

и наконецъ значеніе $\frac{1}{2}$, если γ совпадаетъ съ однимъ изъ чиселъ $-\beta$ и $+\beta$. Въ силу же равенствъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\beta\xi\operatorname{Sin}\gamma\xi}{\xi}d\xi = 0 \text{ и } e^{\gamma i\xi} = \operatorname{Cos}\gamma\xi + i\operatorname{Sin}\gamma\xi,$$

гдѣ $i = \sqrt{-1}$, имѣемъ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Sin}\beta\xi \cdot \operatorname{Cos}\gamma\xi}{\xi}\, d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Sin}\beta\xi}{\xi} e^{\gamma i\xi}\, d\xi.$$

Слѣдовательно при $\beta > 0$ должно быть:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Sin}\beta\xi}{\xi} e^{i\gamma\xi}\, d\xi = 1, \quad \text{если} \; -\beta < \gamma < \beta,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Sin}\beta\xi}{\xi} e^{i\gamma\xi}\, d\xi = 0, \quad \text{если} \; \gamma < -\beta \; \text{или} \; \gamma > \beta,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Sin}\beta\xi}{\xi} e^{i\gamma\xi}\, d\xi = \frac{1}{2}, \quad \text{если} \; \gamma = -\beta \; \text{или} \; \gamma = \beta.$$

Принявъ это во вниманіе, прибавимъ къ каждому произведенію $\rho\sigma\tau \ldots \omega$ соотвѣтственный множитель

$$H = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Sin}\beta\xi}{\xi} e^{i\gamma\xi}\, d\xi,$$

гдѣ

$$\beta = \frac{t_2 - t_1}{2}\sqrt{2A} \text{ и } \gamma = x + y + \ldots + w - a - b - \ldots - l - \frac{t_2 + t_1}{2}\sqrt{2A},$$

и разсмотримъ сумму

$$\Sigma H\rho\sigma\tau \ldots \omega.$$

Если ни одно изъ двухъ чиселъ

$$a + b + c + \ldots + l + t_1\sqrt{2A} \text{ и } a + b + c + \ldots + l + t_2\sqrt{2A}$$

не принадлежитъ къ числу значеній

$$x + y + z + \ldots + w,$$

то множитель H будетъ нулемъ для всѣхъ членовъ суммы

$$\Sigma H\rho\sigma\tau \ldots \omega$$

кромѣ тѣхъ, которымъ соотвѣтствуютъ неравенства

$$t_1\sqrt{2A} < x + y + z + \ldots + w - a - b - c - \ldots - l < t_2\sqrt{2A}.$$

Для этихъ послѣднихъ

$$H = 1,$$

и потому сумма

$$\Sigma H\rho\sigma\tau \ldots \omega$$

приводится къ той именно суммѣ

$$\Sigma'\rho\sigma\tau \ldots \omega,$$

которая выражаетъ вѣроятность неравенствъ

$$t_1\sqrt{2A} < X+Y+Z+\ldots+W-a-b-c-\ldots-l < t_2\sqrt{2A}.$$

Если же сумма

$$x+y+z+\ldots+w$$

можетъ равняться

$$a+b+c+\ldots+l+t_1\sqrt{2A} \text{ или } a+b+c+\ldots+l+t_2\sqrt{2A},$$

то множитель H можетъ получать значеніе $\frac{1}{2}$.

Тогда, какъ нетрудно видѣть, сумма

$$\Sigma H\rho\sigma\tau \ldots \omega$$

будетъ среднею ариѳметическою двухъ суммъ, изъ которыхъ одна выражаетъ вѣроятность неравенствъ

$$t_1\sqrt{2A} < X+Y+Z+\ldots+W-a-b-c-\ldots-l < t_2\sqrt{2A},$$

а другая вѣроятность тѣхъ же неравенствъ съ присоединеніемъ случаевъ равенства

$$X+Y+Z+\ldots+W-a-b-c-\ldots-l = t_1\sqrt{2A}$$

и

$$X+Y+Z+\ldots+W-a-b-c-\ldots-l = t_2\sqrt{2A}.$$

Другими словами, сумма

$$\Sigma H\rho\sigma\tau \ldots \omega$$

отличается отъ

$$\Sigma'\rho\sigma\tau \ldots \omega$$

только половиною вѣроятности выполненія одного изъ равенствъ

$$X+Y+Z+\ldots+W-a-b-c-\ldots-l = t_1\sqrt{2A}$$

и

$$X + Y + Z + \dots + W - a - b - c - \dots - l = t_2 \sqrt{2A}.$$

Слѣдовательно, если пренебречь вѣроятностью послѣднихъ равенствъ, считая ихъ невозможными или маловѣроятными, то можно разсматривать сумму

$$\Sigma H\rho\sigma\tau \dots \omega$$

какъ вѣроятность, что

$$X + Y + Z + \dots + W$$

лежитъ въ предѣлахъ

$$a + b + c + \dots + l + t_1 \sqrt{2A} \text{ и } a + b + c + \dots + l + t_2 \sqrt{2A}.$$

Обращаясь къ суммѣ

$$\Sigma H\rho\sigma\tau \dots \omega$$

и замѣняя въ ней H соотвѣтствующимъ выраженіемъ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Sin}\frac{t_2 - t_1}{2}\xi\sqrt{2A}}{\xi} e^{i\left(x + y + \dots + w - a - b - \dots - l - \frac{t_1 + t_2}{2}\sqrt{2A}\right)\xi} d\xi$$

получаемъ

$$\Sigma H\rho\sigma\tau \dots \omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega \frac{\operatorname{Sin}\frac{t_2 - t_1}{2}\xi\sqrt{2A}}{\xi} e^{-\frac{t_1 + t_2}{2} i\xi\sqrt{2A}} d\xi,$$

гдѣ

$$\Omega = \Sigma\rho\sigma\tau \dots \omega\, e^{i(x + y + z + \dots + w - a - b - c - \dots - l)\xi}$$

$$= \left\{\Sigma\rho e^{i(x-a)\xi}\right\}\left\{\Sigma\sigma e^{i(y-b)\xi}\right\} \dots \left\{\Sigma\omega e^{i(w-l)\xi}\right\}.$$

Относительно суммъ

$$\Sigma\rho e^{i(x-a)\xi},\ \Sigma\sigma e^{i(y-b)\xi}, \dots,\ \Sigma\omega e^{i(w-l)\xi}$$

прежде всего замѣтимъ, что ихъ модули, вообще говоря, меньше единицы:

$$\text{мод. } \Sigma\rho e^{i(x-a)\xi} \leqq \Sigma \text{ мод. } \rho e^{i(x-a)\xi} = \Sigma\rho = 1,$$

. . . .

$$\text{мод. } \Sigma\omega e^{i(w-l)\xi} \leqq \Sigma \text{ мод. } \omega e^{i(w-l)\xi} = \Sigma\omega = 1.$$

На этомъ основаніи, при большомъ числѣ величинъ

$$X, Y, Z, \ldots, W,$$

мы будемъ считать модуль Ω такимъ малымъ числомъ, которымъ можно пренебречь для всѣхъ значеній ξ кромѣ смежныхъ съ нулемъ. Разсматривая разложеніе Ω въ рядъ по возрастающимъ степенямъ ξ и ограничиваясь первыми членами этого ряда, мы замѣнимъ Ω болѣе простымъ выраженіемъ, которое также близко къ нулю при всѣхъ значеніяхъ ξ, кромѣ смежныхъ съ нулемъ, и даетъ, при разложеніи по возрастающимъ степенямъ ξ, тѣ же первые члены. Для указанной цѣли разлагаемъ въ рядъ, по извѣстной формулѣ, каждое изъ выраженій

$$e^{i(x-a)\xi},\ e^{i(y-b)\xi}, \ldots,\ e^{i(w-l)\xi}$$

и подставляемъ эти разложенія въ суммы

$$\Sigma\rho e^{i(x-a)\xi},\ \Sigma\sigma e^{i(y-b)\xi}, \ldots,\ \Sigma\omega e^{i(w-l)\xi}.$$

Такимъ образомъ получаемъ

$$\Sigma\rho e^{i(x-a)\xi} = \Sigma\rho + i\xi\Sigma\rho(x-a) - \frac{\xi^2}{2}\Sigma\rho(x-a)^2 + \ldots$$

$$= 1 - \frac{a_1 - a^2}{2}\xi^2 + \ldots,$$

$$\Sigma\sigma e^{i(y-b)\xi} = 1 - \frac{b_1 - b^2}{2}\xi^2 + \ldots,$$

. . . .

$$\Sigma\omega e^{i(w-l)\xi} = 1 - \frac{l_1 - l^2}{2}\xi^2 + \ldots,$$

и затѣмъ посредствомъ умноженія рядовъ находимъ

$$\Omega = 1 - \frac{A\xi^2}{2} + \ldots,$$

гдѣ A имѣетъ прежнее значеніе:

$$A = a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 + \ldots + l_1 - l^2.$$

Тѣми же членами

$$1 - \frac{A}{2}\xi^2$$

начинается и разложеніе въ рядъ, по степенямъ ξ, показательной функціи

$$e^{-\frac{A}{2}\xi^2},$$

которая при всѣхъ значеніяхъ ξ, кромѣ смежныхъ съ нулемъ, близка къ нулю, если A число большое. Подставляя эту функцію на мѣсто Ω, получаемъ для вѣроятности неравенствъ

$$t_1\sqrt{2A} < X + Y + Z + \ldots + W - a - b - c - \ldots - l < t_2\sqrt{2A}$$

приближенную величину въ видѣ интеграла

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Sin}\frac{t_2 - t_1}{2}\xi\sqrt{2A}}{\xi} e^{-\frac{t_1 + t_2}{2} i\xi\sqrt{2A} - \frac{1}{2}A\xi^2} d\xi,$$

который равенъ

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Sin}\frac{t_2 - t_1}{2}\xi\sqrt{2A}\cdot\operatorname{Cos}\frac{t_1 + t_2}{2}\xi\sqrt{2A}}{\xi} e^{-\frac{1}{2}A\xi^2} d\xi$$

и легко приводится къ разности

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{Sin} t_2\zeta}{\zeta} e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} d\zeta - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{Sin} t_1\zeta}{\zeta} e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} d\zeta,$$

если положить

$$2A\xi^2 = \zeta^2.$$

Съ другой стороны нетрудно доказать, что интегралъ

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{Sin} t\zeta}{\zeta} e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} d\zeta,$$

гдѣ t не зависитъ отъ ζ, равенъ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2} dt.$$

Дѣйствительно, положивъ для краткости

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{Sin} t\zeta}{\zeta} e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} d\zeta = V$$

и разсматривая V какъ функцію перемѣннаго числа t, посредствомъ дифференцированія подъ знакомъ интеграла получаемъ

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \operatorname{Cos} t\zeta \, d\zeta.$$

Второе же дифференцированіе даетъ

$$\frac{d^2 V}{dt^2} = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \zeta \operatorname{Sin} t\zeta \, d\zeta = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{Sin} t\zeta \, d\left(e^{-\frac{1}{4}\zeta^2}\right),$$

откуда посредствомъ интегрированія по частямъ выводимъ

$$\frac{d^2 V}{dt^2} = -\frac{4t}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \operatorname{Cos} t\zeta \, d\zeta = -2t\frac{dV}{dt}$$

и затѣмъ

$$d\left\{\log \frac{dV}{dt}\right\} = d(-t^2).$$

Слѣдовательно

$$\frac{dV}{dt} = Ee^{-t^2},$$

гдѣ E означаетъ число постоянное, и

$$V = E\int_0^t e^{-t^2} dt,$$

ибо при $t = 0$ должно быть

$$V = 0.$$

Остается опредѣлить постоянное E. Число E совпадаетъ со значеніемъ производной $\frac{dV}{dt}$ при $t = 0$. Давая же t значеніе 0, находимъ, что соотвѣтствующее значеніе $\frac{dV}{dt}$ выражается интеграломъ

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} d\zeta,$$

который равенъ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Итакъ

$$E = \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad V = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2} dt$$

и наконецъ

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin t_2\zeta}{\zeta} e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} d\zeta - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin t_1\zeta}{\zeta} e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} d\zeta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt.$$

Изложенный нами выводъ приближенной величины вѣроятности неравенствъ

$$t_1\sqrt{2A} < X + Y + Z + \ldots + W - a - b - c - \ldots - l < t_2\sqrt{2A}$$

не даетъ никакихъ указаній относительно размѣра погрѣшности этой приближенной величины. И только по аналогіи съ тѣмъ, что было установлено при доказательствѣ теоремы Бернулли, можно догадываться, что интегралъ

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt$$

будетъ при нѣкоторыхъ условіяхъ предѣломъ вѣроятности вышеприведенныхъ неравенствъ, что я называю *теоремой о предѣлѣ вѣроятности*. Этой теоремѣ посвящено особое приложеніе, въ концѣ книги, а здѣсь мы изложимъ только простое доказательство нижеслѣдующей теоремы о математическихъ ожиданіяхъ, которая можетъ служить для вывода предложенія о предѣлѣ вѣроятности при опредѣленныхъ условіяхъ.

§ 18. **Теорема о математическихъ ожиданіяхъ.**

Если для неограниченнаго ряда независимыхъ величинъ

$$X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n, \ldots$$

имѣемъ

м. о. $X_k = a_k$, м. о. $(X_k - a_k)^2 = c_k$, чис. знач. м. о. $(X_k - a_k)^\alpha = c_k^{(\alpha)}$

и числа c_k, $c_k^{(\alpha)}$ *удовлетворяютъ условію, что оба отношенія*

$$\frac{c_1^{(\alpha)} + c_2^{(\alpha)} + \ldots + c_n^{(\alpha)}}{(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)^{\frac{\alpha}{2}}} \quad \text{и} \quad \frac{c_1^{\alpha-1} + c_2^{\alpha-1} + \ldots + c_n^{\alpha-1}}{(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)^{\alpha-1}},$$

при

$$\alpha = 3,\ 4,\ 5, \ldots,$$

стремятся къ предѣлу нуль вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$, *то математическое*

ожиданіе степени

$$\left\{\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n-a_1-a_2-\ldots-a_n}{\sqrt{2(c_1+c_2+\ldots+c_n)}}\right\}^m,$$

показатель m которой любое цѣлое положительное число, приближается къ предѣлу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^m e^{-t^2}\,dt,$$

когда n возрастаетъ безпредѣльно.

Доказательство.

Согласно извѣстному обобщенію формулы Ньютона имѣемъ

$$(X_1+X_2+\ldots+X_n-a_1-a_2-\ldots-a_n)^m=\sum\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}S^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda},$$

гдѣ $S^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}$ означаетъ симметрическую функцію разностей

$$X_1-a_1,\ X_2-a_2,\ldots,\ X_n-a_n,$$

для опредѣленія которой можетъ служить одинъ ея членъ

$$(X_1-a_1)^\alpha(X_2-a_2)^\beta\ldots(X_i-a_i)^\lambda,$$

и суммированіе, обозначенное символомъ Σ, должно быть распространено на всѣ совокупности цѣлыхъ положительныхъ чиселъ α, $\beta,\ldots,\lambda$, удовлетворяющія условію

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda=m.$$

Отсюда въ силу установленныхъ ранѣе теоремъ о математическихъ ожиданіяхъ суммъ и произведеній выводимъ

$$\text{м. о. }(X_1+X_2+\ldots+X_n-a_1-a_2-\ldots-a_n)^m=\sum\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}G^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda},$$

гдѣ $G^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}$ означаетъ математическое ожиданіе суммы $S^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}$ и получается изъ этой суммы черезъ замѣну степеней разностей

$$X_1-a_1,\ X_2-a_2,\ldots,\ X_n-a_n$$

математическими ожиданіями тѣхъ же степеней. И такъ какъ математическія ожиданія первыхъ степеней разностей

$$X_1-a_1,\ X_2-a_2,\ldots,\ X_n-a_n$$

равны нулю, то изъ выраженій

$$G^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda}$$

только тѣ могутъ быть отличными отъ нуля, для которыхъ каждое изъ чиселъ

$$\alpha, \beta, \ldots, \lambda$$

больше единицы.

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы безъ большого труда можемъ установить неравенство

$$\frac{\text{чис. зн. } G^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda}}{(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)^{\frac{m}{2}}} < \frac{c_1^{(\alpha)} + \ldots + c_n^{(\alpha)}}{(c_1 + \ldots + c_n)^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{c_1^{(\beta)} + \ldots + c_n^{(\beta)}}{(c_1 + \ldots + c_n)^{\frac{\beta}{2}}} \cdots \frac{c_1^{(\lambda)} + \ldots + c_n^{(\lambda)}}{(c_1 + \ldots + c_n)^{\frac{\lambda}{2}}}.$$

А это неравенство обнаруживаетъ, что при условіяхъ теоремы отношеніе

$$\frac{G^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda}}{(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)^{\frac{m}{2}}},$$

гдѣ

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = m,$$

должно приближаться къ предѣлу нуль вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$, если только среди чиселъ $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ встрѣчаются отличныя отъ 2.

При m нечетномъ числа $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, сумма которыхъ равна m, не могутъ быть всѣ равными 2 и потому для всѣхъ возможныхъ совокупностей $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ отношеніе

$$\frac{G^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda}}{(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)^{\frac{m}{2}}}$$

должно приближаться къ предѣлу нуль вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$.

При четномъ же m существуетъ одна и только одна совокупность чиселъ $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, для которой отношеніе

$$\frac{G^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda}}{(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)^{\frac{m}{2}}}$$

можетъ не приближаться къ нулю вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$: эта единственная совокупность состоитъ изъ $\frac{m}{2}$ чиселъ равныхъ 2.

Слѣдовательно при m нечетномъ должно быть

$$\text{пред. м. о.} \left\{\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_n}{\sqrt{2(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)}}\right\}^m_{n=\infty} = 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^m e^{-t^2} dt;$$

а при m четномъ къ предѣлу нуль должна приближаться разность

$$\text{м. о.} \left\{\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_n}{\sqrt{2(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)}}\right\}^m - \frac{m!}{2^m} \frac{G^{2,2,\ldots,2}}{(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)^{\frac{m}{2}}},$$

гдѣ $G^{2,2,\ldots,2}$ означаетъ симметрическую функцію величинъ

$$c_1, c_2, \ldots, c_n,$$

которая вполнѣ опредѣляется однимъ своимъ членомъ

$$c_1 c_2 \ldots c_{\frac{m}{2}}.$$

Съ другой стороны, согласно той же формулѣ Ньютона, при m четномъ имѣемъ

$$(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)^{\frac{m}{2}} = \sum \frac{\frac{m}{2}!}{\mu! \, \nu! \ldots \omega!} H^{\mu, \nu, \ldots, \omega},$$

гдѣ $H^{\mu, \nu, \ldots, \omega}$ означаетъ симметрическую функцію величинъ $c_1, c_2, \ldots, c_n$, которая опредѣляется однимъ ея членомъ

$$c_1^{\mu} c_2^{\nu} \ldots c_j^{\omega},$$

а суммированіе, обозначенное буквою Σ, распространяется на всѣ совокупности цѣлыхъ положительныхъ чиселъ $\mu, \nu, \ldots, \omega$, удовлетворяющія условію

$$\mu + \nu + \ldots + \omega = \frac{m}{2}.$$

И нетрудно установить неравенство

$$H^{\mu, \nu, \ldots, \omega} < (c_1^{\mu} + c_2^{\mu} + \ldots + c_n^{\mu})(c_1^{\nu} + c_2^{\nu} + \ldots + c_n^{\nu}) \ldots (c_1^{\omega} + c_2^{\omega} + \ldots + c_n^{\omega}),$$

которое обнаруживаетъ, что при нашихъ предположеніяхъ отношеніе

$$\frac{H^{\mu, \nu, \ldots, \omega}}{(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)^{\frac{m}{2}}}$$

должно приближаться къ предѣлу нуль вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$, если только не всѣ числа μ, ν, ..., ω равны единицѣ.

На этомъ основаніи заключаемъ, что разность

$$\left(\frac{c_1 + c_2 + \ldots . + c_n}{c_1 + c_2 + \ldots . + c_n}\right)^{\frac{m}{2}} - \left(\frac{m}{2}!\right)\frac{G^{2,2,\ldots,2}}{(c_1 + c_2 + \ldots . + c_n)^{\frac{m}{2}}}$$

должна приближаться къ предѣлу нуль вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$.

Сопоставляя же этотъ результатъ съ найденнымъ выше, заключаемъ, что при безпредѣльномъ возрастаніи числа n математическое ожиданіе степени

$$\left\{\frac{X_1 + X_2 + \ldots . + X_n - a_1 - a_2 - \ldots . - a_n}{\sqrt{2(c_1 + c_2 + \ldots . + c_n)}}\right\}^m,$$

гдѣ m четное положительное число, приближается къ предѣлу равному числу

$$\frac{m!}{2^m\left(\frac{m}{2}!\right)} = \frac{1.3.5\ldots.(m-1)}{2^{\frac{m}{2}}},$$

которому равенъ и интегралъ

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^m e^{-t^2}\, dt.$$

Такимъ образомъ теорема о математическихъ ожиданіяхъ доказана вполнѣ.

Примѣчаніе. При формулировкѣ теоремы можно не упоминать о второмъ изъ приведенныхъ нами двухъ отношеній

$$\frac{c_1^{(\alpha)} + c_2^{(\alpha)} + \ldots . + c_n^{(\alpha)}}{(c_1 + c_2 + \ldots . + c_n)^{\frac{\alpha}{2}}} \quad \text{и} \quad \frac{c_1^{\alpha-1} + c_2^{\alpha-1} + \ldots . + c_n^{\alpha-1}}{(c_1 + c_2 + \ldots . + c_n)^{\alpha-1}},$$

такъ какъ въ силу неравенства

$$c_k^{\alpha-1} < c_k^{(2\alpha-2)},$$

доказательство котораго не представляетъ большихъ затрудненій, оно должно стремиться къ предѣлу нуль вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$, если къ такому предѣлу стремится первое отношеніе, при всѣхъ указан-

ныхъ нами значеніяхъ α. Съ другой стороны, изъ приведеннаго нами доказательства можно заключить, что теорема о математическихъ ожиданіяхъ не приложима къ тѣмъ случаямъ, когда отношенія

$$\frac{c_1^{\alpha-1} + c_2^{\alpha-1} + \ldots + c_n^{\alpha-1}}{(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)^{\alpha-1}}$$

стремятся къ нулю вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$, а отношенія

$$\frac{c_1^{(\alpha)} + c_2^{(\alpha)} + \ldots + c_n^{(\alpha)}}{(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)^{\frac{\alpha}{2}}}$$

не приближаются къ нулю.

§ 19. Остановимся теперь на приложеніи исчисленія вѣроятностей, вообще, и обобщенной теоремы Бернулли, въ частности, къ вопросу о выгодности и невыгодности болѣе или менѣе рискованныхъ предпріятій.

Предполагая, что всѣ капиталы можно выразить числами при одной опредѣленной единицѣ мѣры, мы будемъ разсматривать каждое предпріятіе только съ точки зрѣнія увеличенія или уменьшенія капиталовъ разныхъ лицъ. Понятіе о выгодности или невыгодности предпріятія для даннаго лица представляется вполнѣ яснымъ только въ тѣхъ случаяхъ, когда нѣтъ сомнѣнія въ томъ, должно ли это предпріятіе увеличить капиталъ лица или напротивъ уменьшить: выгодны всѣ предпріятія, которыя несомнѣнно увеличиваютъ капиталъ, и не выгодны всѣ, которыя несомнѣнно уменьшаютъ капиталъ. Совершенно иначе представляется дѣло для предпріятій рискованныхъ, т. е. для такихъ, которыя могутъ какъ увеличить, такъ и уменьшить капиталы участвующихъ лицъ. Замѣтимъ, что съ математической точки зрѣнія едва ли не всѣ предпріятія слѣдуетъ признать болѣе или менѣе рискованными. Для рискованныхъ предпріятій понятіе о выгодности или невыгодности ихъ не имѣетъ уже вполнѣ опредѣленнаго смысла.

Можно, конечно, сказать, что выгодны всѣ предпріятія, отъ которыхъ съ большою вѣроятностью слѣдуетъ ожидать значительнаго приращенія капитала, если притомъ возможный убы-

токъ представляется не только маловѣроятнымъ, но и незначительнымъ. Едва ли кто нибудь станетъ спорить противъ подобнаго утвержденія. Но по своей неопредѣленности оно не можетъ служить общимъ основаніемъ для различія выгодныхъ предпріятій отъ убыточныхъ. Сверхъ того условіе незначительности возможнаго убытка напрасно исключаетъ изъ числа выгодныхъ предпріятій многократное повтореніе одного и того же предпріятія, какимъ бы выгоднымъ ни представлялось это предпріятіе.

Стараясь провести границу между выгодными и невыгодными предпріятіями, мы вынуждены причислить къ выгоднымъ и такія предпріятія, которыя съ обыденной точки зрѣнія едва ли можно считать выгодными, въ виду сопряженнаго съ ними риска. Для предпріятій, которыя допускаютъ перечисленіе всѣхъ возможныхъ результатовъ съ указаніемъ ихъ вѣроятностей, основаніемъ дѣленія на выгодныя и невыгодныя намъ послужитъ математическое ожиданіе приращенія капитала.

Именно мы назовемъ предпріятіе выгоднымъ, убыточнымъ, или неопредѣленнымъ, смотря по тому, будетъ ли математическое ожиданіе приращенія капитала, отъ этого предпріятія, числомъ положительнымъ, отрицательнымъ или нулемъ.

Такое дѣленіе оправдывается ссылкой на обобщенную теорему Бернулли, если допустить возможность повторенія каждаго предпріятія неограниченное число разъ.

Въ силу обобщенной теоремы Бернулли отъ повторенія предпріятія достаточно большое число разъ слѣдуетъ, съ вѣроятностью сколь угодно близкою къ достовѣрности, ожидать произвольно большой выгоды, если для этого предпріятія математическое ожиданіе приращенія капитала выражается положительнымъ числомъ. Напротивъ, если для нѣкотораго предпріятія математическое ожиданіе приращенія капитала выражается отрицательнымъ числомъ, то отъ его повторенія достаточно большое число разъ слѣдуетъ, съ вѣроятностью сколь угодно близкою къ достовѣрности, ожидать уменьшенія капитала.

Наконецъ въ третьемъ случаѣ, когда математическое ожиданіе приращенія капитала равно нулю, обобщенная теорема Бернулли указываетъ только на большую вѣроятность малыхъ значеній отношенія измѣненія капитала къ числу разъ выполненія предпріятія, если это число достаточно велико. Но остается вполнѣ неопредѣленнымъ, будетъ ли это измѣненіе состоять въ увеличеніи или напротивъ въ уменьшеніи капитала: въ силу теоремы о предѣлѣ вѣроятностей разность вѣроятностей увеличенія и уменьшенія капитала будетъ произвольно мала, если предпріятіе повторится достаточное число разъ.

Замѣтимъ, что вопросъ о выгодности или невыгодности предпріятія должно разсматривать для каждаго изъ его участниковъ отдѣльно, такъ какъ интересы различныхъ участниковъ могутъ быть и часто бываютъ совершенно противоположными.

Разсмотрѣніе выгодности или невыгодности предпріятія, въ установленномъ нами смыслѣ, представляетъ одно изъ руководящихъ основаній для рѣшенія вопроса о томъ, слѣдуетъ ли участвовать въ предпріятіи или нѣтъ, такъ какъ это разсмотрѣніе даетъ возможность судить о вѣроятныхъ результатахъ многократнаго повторенія предпріятія.

Хотя это руководящее основаніе не можетъ быть признано единственнымъ, но другого столь же опредѣленнаго нѣтъ.

Какъ при выгодныхъ, такъ и при невыгодныхъ предпріятіяхъ должно имѣть въ виду не только вѣроятный результатъ ихъ многократнаго повторенія, но и возможные результаты ихъ повторенія различное число разъ. При повтореніи выгоднаго предпріятія неограниченное число разъ обогащеніе становится крайне вѣроятнымъ; но такое повтореніе можетъ встрѣтить разнообразныя препятствія, изъ которыхъ одно состоитъ въ разореніи разсматриваемаго лица. Поэтому важно опредѣлить вѣроятность предположенія, что при повтореніи предпріятія, различное число разъ, убытокъ не превзойдетъ данной величины.

Здѣсь можетъ быть полезнымъ приближенное выраженіе вѣроятности въ видѣ опредѣленнаго интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2}\,dt,$$

указанное нами какъ предѣлъ вѣроятности. Окончательное рѣшеніе вопроса о томъ, слѣдуетъ или не слѣдуетъ участвовать въ предпріятіи, зависитъ отъ чисто субъективнаго понятія о допустимой степени риска. Теорія можетъ только предлагать тѣ или другія мѣры риска, но она не можетъ установить, какую степень риска должно признавать допустимою. Подобныя же замѣчанія относятся и къ невыгоднымъ предпріятіямъ.

Всѣ проекты вѣрнаго обогащенія посредствомъ невыгодныхъ предпріятій основаны на заблужденіи. Однако выполненіе невыгоднаго предпріятія иногда можно считать благоразумнымъ; именно въ тѣхъ случаяхъ, когда это невыгодное предпріятіе уменьшаетъ вѣроятность большихъ потерь, грозящихъ разореніемъ.

Пояснимъ сказанное частными примѣрами. Положимъ, что нѣкоторое предпріятіе можетъ представить только два случая, изъ которыхъ одинъ даетъ увеличеніе нашего капитала на десять рублей, а другой, напротивъ, уменьшеніе на тысячу двѣсти рублей. Пусть далѣе вѣроятность перваго случая равна 0,99, а вѣроятность второго 0,01. Математическое ожиданіе нашей выгоды отъ этого предпріятія выражается, въ рубляхъ, отрицательнымъ числомъ

$$0{,}99 \times 10 - 0{,}01 \times 1200 = -2{,}1.$$

что указываетъ на невыгодность предпріятія. Выполняя его одинъ разъ, мы можемъ расчитывать, съ довольно большою вѣроятностью (0,99), пріобрѣсть незначительную сумму (10 руб.), но рискуемъ потерять гораздо большую сумму (1200 руб.), хотя и съ малою вѣроятностью (0,01). Если же въ видахъ возможнаго обогащенія мы станемъ повторять это предпріятіе неограниченное число разъ, то вѣроятнымъ результатомъ такого повторенія будетъ не обогащеніе, а разореніе. Такъ уже при стократномъ повтореніи предпріятія вѣроятность прибыли оказы-

вается значительно меньше вѣроятности убытка; именно вѣроятность прибыли при стократномъ повторенiи предпрiятiя выражается числомъ

$$(0,99)^{100} \doteqdot 0,36603$$

и потому вѣроятность убытка равна

$$1-(0,99)^{100} \doteqdot 0,63397.$$

Между тѣмъ такое стократное повторенiе предпрiятiя не доводитъ возможную прибыль даже до величины возможнаго убытка одного предпрiятiя. При повторенiи предпрiятiя 10000 разъ возможная прибыль достигаетъ до 100000 рублей, но вѣроятность такой прибыли выражается весьма малымъ числомъ

$$(0,99)^{10000} \doteqdot \frac{2249}{10^{47}}.$$

И не только вѣроятность получить прибыль въ 100000 руб., но и вѣроятность получить прибыль, вообще, оказывается довольно малою, при повторенiи предпрiятiя 10000 разъ.

Дѣйствительно, вѣроятность получить, при повторенiи предпрiятiя 10000 разъ, какую нибудь прибыль выражается суммою восьмидесяти трехъ членовъ

$$(0,99)^{10000} + 10000(0,99)^{9999}(0,01) + \ldots + \frac{1.2.3\ldots10000}{1.2\ldots82.12\ldots9918}(0,99)^{9918}(0,01)^{82},$$

изъ которыхъ послѣднiй

$$\frac{1.2.3\ldots10000}{1.2\ldots82.12\ldots9918}(0,99)^{9918}(0,01)^{82}$$

меньше числа

$$\sqrt{\frac{10000}{2\pi.82.9918}}\left(\frac{9900}{9918}\right)^{9918}\left(\frac{100}{82}\right)^{82} = 0,00773\ldots$$

Отношенiе же этой суммы къ ея послѣднему члену, какъ не трудно убѣдиться, меньше

$$\frac{1}{1-\frac{82.99}{9919}} = \frac{9919}{1801} = 5,5\ldots.$$

Такъ какъ произведеніе чиселъ

0,00773.... и 5,5....

меньше 0,05, то и разсматриваемая нами вѣроятность прибыли, при повтореніи предпріятія 10000 разъ, меньше 0,05.

Наконецъ, при повтореніи предпріятія 1000000 разъ оказывается весьма малою не только вѣроятность избѣжать убытка, но и вѣроятность, что убытокъ будетъ меньше крупной суммы 100000 руб. Прибѣгая къ приближеннымъ вычисленіямъ, мы можемъ за послѣднюю вѣроятность принять

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt,$$

гдѣ t опредѣляется уравненіемъ

$$(np + t\sqrt{2npq})\,A - (nq - t\sqrt{2npq})\,B = -100000$$

при

$$n = 1000000,\ p = 0{,}99,\ q = 0{,}01,\ A = 10,\ B = 1200.$$

Указанное уравненіе даетъ для t величину

$$\frac{2000000}{1210\sqrt{19800}} \mp 11,$$

при которой величина интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty} e^{-t^2}\,dt$$

меньше $\frac{1}{10^{50}}$. Мы пользуемся здѣсь извѣстнымъ неравенствомъ

$$\int_t^{\infty} e^{-t^2}\,dt < \frac{e^{-t^2}}{2t},$$

которое нетрудно установить при помощи интегрированія по частямъ.

Чтобы имѣть затѣмъ примѣръ выгоднаго предпріятія, сохранимъ всѣ условія только что разсмотрѣннаго примѣра, кромѣ одного: именно, за величину возможной прибыли будемъ считать

не 10, а 20 рублей. Тогда математическое ожиданіе прибыли выразится, въ рубляхъ, положительнымъ числомъ

$$20 \times 0{,}99 - 1200 \times 0{,}01 = 7{,}8,$$

что и указываетъ на выгодность предпріятія.

Однократное выполненіе такого предпріятія представляетъ, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, незначительную прибыль (20 руб.), соединенную съ рискомъ потерять гораздо большую сумму (1200 руб.). При стократномъ повтореніи предпріятія вѣроятность убытка перестаетъ уже быть очень малою величиною: она выражается тогда разностью

$$1 - (0{,}99)^{100}\left\{1 + \frac{100}{99}\right\}$$

равною

$$0{,}2642$$

съ точностью до $\frac{1}{2.10^4}$.

Если же мы имѣемъ возможность повторить это предпріятіе произвольное число разъ, то можемъ разсчитывать обогатиться съ вѣроятностью сколь угодно близкою къ достовѣрности; впрочемъ не устранена, окончательно, и возможность разоренія.

При повтореніи предпріятія 10000 разъ вѣроятность убытка выразится суммою

$$\frac{1.2\ldots.10000}{1.2\ldots.164.1.2\ldots.9836}(0{,}99)^{9836}(0{,}01)^{164} +$$

$$\frac{1.2\ldots.10000}{1.2\ldots.165.1.2\ldots.9835}(0{,}99)^{9835}(0{,}01)^{165} + \ldots.$$

и будетъ меньше

$$\sqrt{\frac{10000}{2\pi.164.9836}}\left(\frac{9900}{9836}\right)^{9836}\left(\frac{100}{164}\right)^{164}\frac{1}{1-\frac{9836}{165.99}},$$

послѣднее же произведеніе меньше $\frac{1}{10^8}$.

Наконецъ при повтореніи предпріятія 1000000 разъ становится весьма близкою къ единицѣ вѣроятность получить прибыль не меньше 1000000. Именно, прибѣгая къ приближеннымъ вы-

численіямъ, мы можемъ за послѣднюю вѣроятность принять

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-t}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty} e^{-t^2}\,dt,$$

гдѣ t опредѣляется уравненіемъ

$$(np - t\sqrt{2npq})\,A - (nq + t\sqrt{2npq})\,B = 1000000$$

при

$$n = 1000000,\ p = 0{,}99,\ q = 0{,}01,\ A = 20,\ B = 1200.$$

Указанное уравненіе даетъ для t величину

$$\frac{6800000}{1220\sqrt{19800}} > 30,$$

при которой разность

$$1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty} e^{-t^2}\,dt$$

отличается отъ единицы на величину меньшую

$$\frac{e^{-900}}{60}.$$

Изъ второго примѣра мы получимъ третій, переставивъ прибыль съ убыткомъ. Предпріятіе, дающее прибыль 1200 рублей съ вѣроятностью 0,01 и убытокъ 20 рублей съ вѣроятностью 0,99, не выгодно, такъ какъ математическое ожиданіе соотвѣтствующей прибыли выражается, въ рубляхъ, отрицательнымъ числомъ

$$1200 \times 0{,}01 - 20 \times 0{,}99 = -7{,}8.$$

Поэтому нельзя рекомендовать многократное повтореніе одного этого предпріятія съ цѣлью обогащенія. Но повтореніе его небольшое число разъ можетъ быть допущено въ виду незначительности убытка. Можно также признать благоразумнымъ присоединеніе этого предпріятія къ другимъ выгоднымъ, но рискованнымъ предпріятіямъ.

Положимъ напримѣръ, что нѣкоторое предпріятіе представляетъ убытокъ 1100 рублей и прибыль въ 120 рублей соотвѣтственно въ тѣхъ случаяхъ, когда только что разсмотрѣнное предпріятіе даетъ прибыль 1200 рублей и убытокъ 20 рублей.

Тогда, присоединяя къ этому новому выгодному, но рискованному предпріятію разсмотрѣнное нами невыгодное предпріятіе, мы обезпечиваемъ себѣ вѣрную выгоду 100 рублей. На подобныхъ началахъ основаны различные виды страхованія.

§ 20. Съ понятіемъ о выгодныхъ и невыгодныхъ предпріятіяхъ тѣсно связано понятіе о *безобидныхъ* и *небезобидныхъ играхъ*. *Игрою* мы называемъ здѣсь не развлеченіе, а всякое предпріятіе, которое представляетъ возможность различныхъ измѣненій капитала каждаго участника въ отдѣльности, но не измѣняетъ общаго ихъ капитала.

Притомъ, подобно прежнему, мы будемъ предполагать, что можно перечислить для каждаго участника всѣ возможныя измѣненія его капитала и указать ихъ вѣроятности. Участниковъ игры мы будемъ называть игроками, и въ случаѣ надобности будемъ отличать ихъ другъ отъ друга нумерами 1, 2, 3...., или буквами A, B, C.... Пусть

$$X_1, X_2, X_3, \ldots.$$

представляютъ, соотвѣтственно, для игроковъ

$$1, 2, 3, \ldots$$

приращенія ихъ капиталовъ, происходящія отъ игры.

Такъ какъ игра не измѣняетъ общей суммы капиталовъ всѣхъ игроковъ, то сумма

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots.$$

приращеній капиталовъ всѣхъ игроковъ должна приводиться къ нулю. Поэтому должна равняться нулю и сумма математическихъ ожиданій тѣхъ же приращеній:

$$\text{м. о. } X_1 + \text{м. о. } X_2 + \text{м. о. } X_3 + \ldots. = 0.$$

И слѣдовательно, если для нѣкоторыхъ изъ игроковъ математическія ожиданія приращеній ихъ капиталовъ отъ игры выражаются числами положительными, то должны быть и такіе игроки, для которыхъ математическія ожиданія приращеній ихъ

капиталовъ отъ той же игры выражаются отрицательными числами. Тогда для однихъ игроковъ игра будетъ выгоднымъ предпріятіемъ, а для другихъ невыгоднымъ; и при повтореніи ея неограниченное число разъ тѣ игроки, для которыхъ игра выгодна, могутъ расчитывать почти навѣрняка обыграть другихъ, для которыхъ игра невыгодна.

Отсюда вытекаетъ такое условіе *безобидности* игръ: *математическое ожиданіе приращенія капитала для каждаго игрока должно приводиться къ нулю.*

Для игръ не безобидныхъ можно, почти съ увѣренностью, предсказывать, кто изъ игроковъ обогатится и кто разорится, при повтореніи игры неограниченное число разъ.

Относительно же безобидныхъ игръ нельзя сдѣлать подобнаго предсказанія. Вмѣстѣ съ тѣмъ однако нельзя полагать, чтобы безобидныя игры при многократномъ ихъ повтореніи не производили значительныхъ измѣненій въ капиталахъ игроковъ и не разоряли никого изъ нихъ. Изъ доказанныхъ нами теоремъ этого не слѣдуетъ и не можетъ слѣдовать.

Обобщенная теорема Бернулли указываетъ только на большую вѣроятность, что будутъ малыми отношенія измѣненій капиталовъ игроковъ къ числу повтореній безобидной игры; но при малыхъ величинахъ этихъ отношеній сами измѣненія могутъ быть значительными. А теорема о предѣлѣ вѣроятности обнаруживаетъ малость вѣроятности, что измѣненія капиталовъ игроковъ останутся малыми при многократномъ повтореніи безобидной игры. Изъ той же теоремы о предѣлѣ вѣроятности слѣдуетъ, что для каждаго игрока вѣроятность получить произвольно большую прибыль и вѣроятность получить произвольно большой убытокъ стремятся къ одному и тому же предѣлу $\frac{1}{2}$, когда число повтореній безобидной игры увеличивается безпредѣльно.

Условіе безобидности игръ должно служить руководящимъ основаніемъ денежныхъ расчетовъ между участниками такихъ предпріятій, которыя подходятъ подъ установленное нами понятіе игры. Часто допускаются, однако, отступленія отъ этого

условія, результатъ которыхъ выражается въ обогащеніи однихъ лицъ на счетъ другихъ. Это бываетъ въ тѣхъ случаяхъ, когда игра организована, съ цѣлью болѣе или менѣе вѣрной наживы, одними участниками такъ, чтобы ее можно было повторять неограниченное число разъ при измѣненіи другихъ участниковъ.

Если организаторы игры сохранили бы условіе безобидности относительно прочихъ участниковъ, то ихъ цѣль не была бы достигнута и они подвергались бы большому риску разоренія.

Что же касается прочихъ участниковъ, изъ которыхъ каждый участвуетъ въ игрѣ только сравнительно небольшое число разъ, то они могутъ считать свое участіе въ ней благоразумнымъ даже и при нѣкоторомъ, не слишкомъ большомъ, нарушеніи условія безобидности, если это предпріятіе предохраняетъ ихъ отъ другого риска, какъ было уже пояснено на частномъ примѣрѣ при разсмотрѣніи выгодныхъ и невыгодныхъ предпріятій.

Здѣсь можетъ возникнуть вопросъ о допустимой степени нарушенія условія безобидности игръ. Но на этотъ вопросъ нельзя дать опредѣленнаго отвѣта; подобно тому, какъ раньше, мы отказались установить допустимую степень риска.

Замѣтимъ еще, что практическія приложенія условія безобидности игръ обыкновенно затрудняются двумя обстоятельствами: невозможностью точно установить вѣроятности различныхъ предположеній и нарушеніемъ условія неизмѣнности общей суммы капиталовъ.

Литература.

П. Чебышевъ. Сочиненія. Томъ I, О среднихъ величинахъ. Томъ II, О двухъ теоремахъ относительно вѣроятностей.

А. Марковъ. Распространеніе закона большихъ чиселъ на величины зависящія другъ отъ друга (Изв. физ.-мат. общ. при Казанскомъ унив. 2 серія, XV, № 4).

A. Liapounoff. Sur une proposition de la théorie des probabilités (Bull. de l'Acad. de St. Petersb. V série, XIII).

ГЛАВА IV.

Примѣры различныхъ пріемовъ вычисленія вѣроятностей.

§ 21. *Задача* $1^{ая}$. Изъ сосуда, содержащаго a бѣлыхъ и b черныхъ шаровъ и никакихъ другихъ, вынимаютъ одновременно или послѣдовательно $\alpha + \beta$ шаровъ, при чемъ, въ случаѣ послѣдовательнаго выниманія, ни одинъ изъ вынутыхъ шаровъ не возвращаютъ обратно въ сосудъ и новыхъ туда также не подкладываютъ.

Требуется опредѣлить вѣроятность, что между вынутыми такимъ образомъ шарами будетъ α бѣлыхъ и β черныхъ.

Первое рѣшеніе. Положимъ, что всѣ шары въ сосудѣ отличены другъ отъ друга нумерами, притомъ такимъ образомъ, что на бѣлыхъ стоятъ нумера

$$1, 2, 3, \ldots, a,$$

а на черныхъ нумера

$$a+1, a+2, \ldots, a+b.$$

Нумера вынутыхъ шаровъ должны образовать нѣкоторую совокупность $\alpha + \beta$ нумеровъ изъ всѣхъ $a + b$ нумеровъ

$$1, 2, 3, \ldots, a+b.$$

Число различныхъ совокупностей $\alpha + \beta$ нумеровъ, которыя можно образовать изъ $a + b$ нумеровъ, равно

$$\frac{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)\ldots(a+b-\alpha-\beta+1)}{1.2.3\ldots(\alpha+\beta)}.$$

Соотвѣтственно этому мы можемъ различить

$$\frac{(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-\alpha-\beta+1)}{1.2.3\ldots(\alpha+\beta)}$$

равновозможныхъ случаевъ, каждый изъ которыхъ состоитъ въ появленіи опредѣленныхъ $\alpha + \beta$ нумеровъ.

Изъ всѣхъ этихъ случаевъ, единственно возможныхъ и несовмѣстимыхъ, благопріятствуютъ появленію α бѣлыхъ и β черныхъ шаровъ тѣ и только тѣ, при которыхъ появляется какая нибудь совокупность α нумеровъ изъ группы

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ a$$

вмѣстѣ съ какою нибудь совокупностью β нумеровъ изъ группы

$$a+1,\ a+2, \ldots,\ a+b.$$

Число различныхъ совокупностей α нумеровъ, которыя можно образовать изъ a нумеровъ, равно

$$\frac{a(a-1)\ldots(a-\alpha+1)}{1.2\ldots\alpha},$$

и число различныхъ совокупностей β нумеровъ, которыя можно образовать изъ b нумеровъ, равно

$$\frac{b(b-1)\ldots(b-\beta+1)}{1.2\ldots\beta}.$$

Поэтому число различныхъ совокупностей $\alpha + \beta$ нумеровъ, которыя получаются отъ соединенія каждой совокупности α нумеровъ изъ группы

$$1,\ 2, \ldots,\ a$$

съ каждою совокупностью β нумеровъ изъ группы

$$a+1,\ a+2, \ldots,\ a+b,$$

выразится произведеніемъ

$$\frac{a(a-1)\ldots(a-\alpha+1)}{1.2\ldots\alpha} \cdot \frac{b(b-1)\ldots(b-\beta+1)}{1.2\ldots\beta}$$

Итакъ, число разсматриваемыхъ нами случаевъ, которые благопріятствуютъ появленію α бѣлыхъ и β черныхъ шаровъ, выражается только что указаннымъ произведеніемъ. И слѣдовательно искомая нами вѣроятность, что среди вынутыхъ $\alpha+\beta$ шаровъ будетъ α бѣлыхъ и β черныхъ, выразится отношеніемъ

$$\frac{\dfrac{a(a-1)\ldots(a-\alpha+1)}{1.2\ldots\alpha}\cdot\dfrac{b(b-1)\ldots(b-\beta+1)}{1.2\ldots\beta}}{\dfrac{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)\ldots(a+b-\alpha-\beta+1)}{1.2.3\ldots(\alpha+\beta)}},$$

которое послѣ простыхъ преобразованій приводится къ

$$\frac{1.2.3\ldots(\alpha+\beta)}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta}\,\frac{a(a-1)\ldots(a-\alpha+1)\,b(b-1)\ldots(b-\beta+1)}{(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-\alpha-\beta+1)}.$$

Числовой примѣръ: $a=3,\ b=4,\ \alpha=2,\ \beta=2$.

Предполагаемъ, что на бѣлыхъ шарахъ поставлены нумера 1, 2, 3 и на черныхъ нумера 4, 5, 6, 7. Нумера на вынутыхъ четырехъ шарахъ могутъ представлять любую изъ слѣдующихъ

$$\frac{7\,.\,6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}=35$$

совокупностей:

1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 5	1, 2, 3, 6	1, 2, 3, 7	1, 2, 4, 5	1, 2, 4, 6	1, 2, 4, 7
1, 2, 5, 6	1, 2, 5, 7	1, 2, 6, 7	1, 3, 4, 5	1, 3, 4, 6	1, 3, 4, 7	1, 3, 5, 6
1, 3, 5, 7	1, 3, 6, 7	1, 4, 5, 6	1, 4, 5, 7	1, 4, 6, 7	1, 5, 6, 7	2, 3, 4, 5
2, 3, 4, 6	2, 3, 4, 7	2, 3, 5, 6	2, 3, 5, 7	2, 3, 6, 7	2, 4, 5, 6	2, 4, 5, 7
2, 4, 6, 7	2, 5, 6, 7	3, 4, 5, 6	3, 4, 5, 7	3, 4, 6, 7	3, 5, 6, 7	4, 5, 6, 7

Если же вынуты 2 бѣлыхъ и 2 черныхъ шара, то ихъ нумера образуютъ одну изъ слѣдующихъ

$$\frac{3\,.\,2}{1\,.\,2}\times\frac{4\,.\,3}{1\,.\,2}=18$$

совокупностей:

1, 2, 4, 5	1, 2, 4, 6	1, 2, 4, 7	1, 2, 5, 6	1, 2, 5, 7	1, 2, 6, 7
1, 3, 4, 5	1, 3, 4, 6	1, 3, 4, 7	1, 3, 5, 6	1, 3, 5, 7	1, 3, 6, 7
2, 3, 4, 5	2, 3, 4, 6	2, 3, 4, 7	2, 3, 5, 6	2, 3, 5, 7	2, 3, 6, 7.

Такимъ образомъ мы имѣемъ 35 равновозможныхъ случаевъ, изъ которыхъ 18 благопріятствуютъ разсматриваемому

событію; слѣдовательно искомая вѣроятность, что между вынутыми четырьмя шарами бѣлыхъ и черныхъ будетъ по два, равна $\frac{18}{35}$.

Второе рѣшеніе. Для отличія вынутыхъ шаровъ другъ отъ друга положимъ, что независимо отъ цвѣта они размѣщены въ какомъ нибудь порядкѣ и соотвѣтственно этому припишемъ имъ нумера

$$1, 2, \ldots, \alpha + \beta.$$

Наши нумера могутъ указывать порядокъ появленія шаровъ, если шары вынуты изъ сосуда послѣдовательно. Послѣ этого для опредѣленія вѣроятности разсматриваемаго событія, которое состоитъ въ появленіи α бѣлыхъ и β черныхъ шаровъ, мы можемъ разбить его на отдѣльные виды, отличающіеся другъ отъ друга порядкомъ бѣлыхъ и черныхъ шаровъ. Число видовъ равно

$$\frac{1.2.3\ldots(\alpha+\beta)}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta}$$

и каждый изъ нихъ состоитъ въ бѣломъ цвѣтѣ α шаровъ, отмѣченныхъ опредѣленными нумерами, и въ черномъ цвѣтѣ остальныхъ вынутыхъ шаровъ. Останавливаясь на любомъ изъ этихъ видовъ, замѣтимъ, что онъ приводится къ одновременному существованію $\alpha + \beta$ событій

$$E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots, E_{\alpha+\beta},$$

гдѣ E_k означаетъ опредѣленный цвѣтъ, бѣлый или черный, шара съ нумеромъ k. Вѣроятность же одновременнаго существованія всѣхъ событій

$$E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots, E_{\alpha+\beta}$$

выражается, согласно теоремѣ умноженія вѣроятностей, произведеніемъ

$$(E_1)(E_2, E_1)\ldots(E_k, E_1 E_2\ldots E_{k-1})\ldots(E_{\alpha+\beta}, E_1 E_2\ldots E_{\alpha+\beta-1}),$$

гдѣ

$$(E_k, E_1 E_2 \ldots E_{k-1})$$

представляетъ вѣроятность событія E_k, когда извѣстно суще-

ствованіе событій

$$E_1, E_2, \ldots, E_{k-1}.$$

Чтобы опредѣлить послѣднюю вѣроятность, надо сосчитать, сколько разъ среди событій

$$E_1, E_2, \ldots, E_{k-1}$$

встрѣчается бѣлый цвѣтъ шара и сколько разъ черный.

Если среди событій

$$E_1, E_2, \ldots, E_{k-1}$$

бѣлый цвѣтъ встрѣчается i разъ, а черный j разъ, при чемъ $i + j = k - 1$; то при несомнѣнномъ ихъ существованіи шаръ съ нумеромъ k можетъ быть только однимъ изъ

$$a + b - k + 1$$

шаровъ, среди которыхъ $a - i$ бѣлыхъ и $b - j$ черныхъ.

И потому вѣроятность, что шаръ съ нумеромъ k бѣлый, выразится при такихъ данныхъ дробью

$$\frac{a-i}{a+b-k+1},$$

а вѣроятность, что онъ черный, при тѣхъ же данныхъ выразится дробью

$$\frac{b-j}{a+b-k+1}.$$

Такимъ образомъ получаемъ

$$(E_k, E_1 E_2 \ldots E_{k-1}) = \frac{\sigma_k}{a+b-k+1},$$

гдѣ

$$\sigma_k = a - i \text{ или } \sigma_k = b - j,$$

смотря по тому, означаетъ ли E_k бѣлый или черный цвѣтъ шара съ нумеромъ k; числа же i и j, сообразно сказанному нами, показываютъ соотвѣтственно, сколько разъ встрѣчается бѣлый цвѣтъ шара и сколько разъ встрѣчается черный цвѣтъ шара среди событій

$$E_1, E_2, \ldots, E_{k-1}.$$

Опредѣляя по указанному правилу каждую изъ вѣроятностей

$$(E_2, E_1), (E_3, E_1 E_2), \ldots, (E_{\alpha+\beta}, E_1 E_2 \ldots E_{\alpha+\beta-1})$$

и замѣчая, что

$$(E_1) = \frac{\sigma_1}{a+b},$$

гдѣ

$$\sigma_1 = a \text{ или } \sigma_1 = b,$$

находимъ для вѣроятности появленія всѣхъ событій

$$E_1, E_2, \ldots, E_{\alpha+\beta}$$

такое выраженіе

$$\frac{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{\alpha+\beta}}{(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-\alpha-\beta+1)}.$$

Числитель

$$\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{\alpha+\beta}$$

этого выраженія состоитъ изъ α множителей вида $a-i$ и β множителей вида $b-j$; ибо среди всѣхъ событій

$$E_1, E_2, \ldots, E_{\alpha+\beta}$$

бѣлый цвѣтъ встрѣчается α разъ, а черный β разъ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ нетрудно видѣть, что какъ i въ разности $a-i$, такъ и j въ разности $b-j$, означаетъ число тѣхъ множителей произведенія

$$\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{\alpha+\beta},$$

которые предшествуютъ этой разности и имѣютъ одинаковый съ нею видъ. Слѣдовательно произведеніе

$$\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{\alpha+\beta}$$

состоитъ изъ множителей

$$a, a-1, \ldots, a-\alpha+1$$

и изъ множителей

$$b, b-1, \ldots, b-\beta+1,$$

и потому оно равно

$$a(a-1)\ldots(a-\alpha+1)\,b(b-1)\ldots(b-\beta+1).$$

Итакъ вѣроятность любого изъ указанныхъ нами видовъ появленія, среди вынутыхъ $\alpha+\beta$ шаровъ, α бѣлыхъ и β черныхъ шаровъ, имѣетъ одну и ту же величину

$$\frac{a(a-1)\ldots(a-\alpha+1)\,b(b-1)\ldots(b-\beta+1)}{(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-\alpha-\beta+1)}.$$

Остается вспомнить, что число этихъ видовъ равно

$$\frac{1.2.3\ldots(\alpha+\beta)}{1.2.3\ldots\alpha.1.2\ldots\beta},$$

и теорема сложенія вѣроятностей тотчасъ дастъ намъ для искомой вѣроятности, что среди вынутыхъ $\alpha+\beta$ шаровъ будетъ α бѣлыхъ и β черныхъ шаровъ, прежнюю величину

$$\frac{1.2\ldots(\alpha+\beta)}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta}\cdot\frac{a(a-1)\ldots(a-\alpha+1)\,b(b-1)\ldots(b-\beta+1)}{(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-\alpha-\beta+1)}.$$

Числовой примѣръ: $a=3,\ b=4,\ \alpha=2,\ \beta=2.$

Обращая вниманіе на порядокъ вынутыхъ шаровъ, мы можемъ разбить событіе, вѣроятность котораго ищемъ, на такіе виды:

ббчч, бчбч, бччб, чббч, чбчб, ччбб,

гдѣ буква *б* указываетъ на бѣлый цвѣтъ, а буква *ч* на черный цвѣтъ шара. Число этихъ видовъ разсматриваемаго событія равно

$$\frac{1.2.3.4}{1.2.1.2}=6,$$

а вѣроятности ихъ, согласно теоремѣ умноженія вѣроятностей, выражаются произведеніями

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4},\quad \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4},\quad \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4},$$

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4},\quad \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4},\quad \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4},$$

которыя приводятся къ одной и той же дроби

$$\frac{3}{35}.$$

Слѣдовательно искомая вѣроятность, что между вынутыми четырьмя шарами бѣлыхъ и черныхъ будетъ по два, равна $\frac{18}{35}$, какъ было найдено и другимъ путемъ.

Задача 2ая. Изъ сосуда, содержащаго n билетовъ съ нумерами

$$1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n$$

и никакихъ другихъ, вынимаютъ одновременно или послѣдова-

тельно m билетовъ, при чемъ, въ случаѣ послѣдовательнаго вынимания, ни одинъ изъ вынутыхъ билетовъ не возвращаютъ обратно въ сосудъ и новыхъ туда также не подкладываютъ.

Требуется опредѣлить вѣроятность, что между нумерами вынутыхъ билетовъ появится i нумеровъ, указанныхъ заранѣе, напр. $1, 2, 3, \ldots, i$.

Рѣшеніе. Эту задачу можно разсматривать какъ тотъ частный случай предыдущей, когда $a = \alpha$. Именно можно i билетовъ, нумера которыхъ указаны заранѣе, уподобить бѣлымъ шарамъ, а остальные билеты уподобить чернымъ шарамъ. Такое уподобленіе тотчасъ обнаруживаетъ, что рѣшеніе поставленной задачи получится изъ рѣшенія предыдущей черезъ замѣну всѣхъ чиселъ

$$a, b, \alpha, \beta$$

соотвѣтственно числами

$$i, n - i, i, m - i.$$

Обращаясь на этомъ основаніи къ найденному раньше выраженію

$$\frac{1.2.3\ldots(\alpha+\beta)}{1.2\ldots\alpha.\ 1.2\ldots\beta}\ \frac{a(a-1)\ldots(a-\alpha+1)\,b(b-1)\ldots(b-\beta+1)}{(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-\alpha-\beta+1)}$$

и дѣлая въ немъ указанную замѣну, получаемъ величину искомой вѣроятности въ видѣ произведенія

$$\frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots i.\ 1.2\ldots(m-i)}\ \frac{i(i-1)\ldots 1\,(n-i)(n-i-1)\ldots(n-m+1)}{n(n-1)\ldots(n-m+1)},$$

которое послѣ сокращенія приводится къ

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{n(n-1)\ldots(n-i+1)}.$$

Итакъ искомая вѣроятность, что среди вынутыхъ m нумеровъ окажутся всѣ указанные напередъ i нумеровъ, выражается дробью

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{n(n-1)\ldots(n-i+1)}.$$

Другое рѣшеніе. Положимъ, что на билетахъ ставятся новые

нумера: на вынутыхъ

$$1, 2, 3, \ldots, m,$$

а на оставшихся въ сосудѣ

$$m+1,\ m+2, \ldots, n.$$

Тогда для указанныхъ напередъ i билетовъ новые ихъ нумера образуютъ какую нибудь совокупность i нумеровъ изъ всѣхъ n нумеровъ. На этомъ основаніи мы можемъ различать

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2\ldots i}$$

равновозможныхъ случаевъ, каждому изъ которыхъ соотвѣтствуетъ опредѣленная совокупность новыхъ нумеровъ на указанныхъ напередъ i билетахъ. Изъ всѣхъ этихъ случаевъ, единственно возможныхъ и несовмѣстимыхъ, благопріятствуютъ появленію всѣхъ указанныхъ напередъ i билетовъ тѣ и только тѣ, при которыхъ вся совокупность новыхъ нумеровъ на этихъ билетахъ составлена изъ чиселъ

$$1, 2, 3, \ldots, m.$$

Число же различныхъ совокупностей i нумеровъ, которыя можно составить изъ m нумеровъ, равно

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{1.2\ldots i}.$$

Итакъ число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ равно

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2\ldots i},$$

а число благопріятствующихъ событію равно

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{1.2\ldots i};$$

и слѣдовательно искомая вѣроятность, что среди вынутыхъ m билетовъ будутъ всѣ указанные напередъ i билетовъ, выражается дробью

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{n(n-1)\ldots(n-i+1)},$$

согласно прежнему выводу.

Для примѣра остановимся на Генуэзской лотереѣ, которая въ прежнее время разыгрывалась во Франціи и во многихъ Германскихъ областяхъ*). Она состояла изъ 90 нумеровъ, и при каждомъ ея розыгрышѣ выходило по 5 нумеровъ. По условію лотереи можно было ставить ту или другую сумму на любой нумеръ, или на любую совокупность двухъ, трехъ, четырехъ, или наконецъ пяти нумеровъ, что называлось, соотвѣтственно, простой одиночкой (l'extrait simple), амбо (l'ambe), тернъ (le terne), катернъ (le quaterne) и кинъ (le quine). Если въ числѣ вышедшихъ пяти нумеровъ находилась совокупность тѣхъ, на которые игрокъ поставилъ сумму, то администрація лотереи выдавала этому игроку условленную сумму, находящуюся въ опредѣленномъ отношеніи къ величинѣ ставки. Это отношеніе

для простой одиночки равнялось	15,
для амбо....................	270,
для тернъ....................	5500,
для катернъ..................	75000,
для кинъ.....................	1000000.

Для вычисленія вѣроятностей появленія простой одиночки, амбо, тернъ, катернъ и кинъ слѣдуетъ въ найденномъ нами выраженіи

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{n(n-1)\ldots(n-i+1)}$$

положить

$$n = 90 \text{ и } m = 5$$

и давать i послѣдовательно значенія

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Такимъ образомъ находимъ, что вѣроятность появленія

простой одиночки равна $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$,

амбо .... $\frac{5.4}{90.89} = \frac{2}{801}$,

*) Подобная лотерея до сихъ поръ процвѣтаетъ въ Италіи.

терн . . . . $\dfrac{5.4.3}{90.89.88} = \dfrac{1}{11748}$,

катерн . . . . $\dfrac{5.4.3.2}{90.89.88.87} = \dfrac{1}{511038}$,

кин . . . . $\dfrac{1}{511038} \cdot \dfrac{1}{86} = \dfrac{1}{43949268}$.

Поэтому, если ставка игрока равна M, то математическое ожиданіе его прибыли отъ участія въ лотереѣ выражается:

въ случаѣ простой одиночки числомъ $\left(\frac{15}{18} - 1\right) M = -\frac{1}{6} M$,

въ случаѣ амбо . . . . $\left(\frac{540}{801} - 1\right) M = -\frac{29}{89} M$,

въ случаѣ терн . . . . $\left(\frac{5500}{11748} - 1\right) M = -\frac{1562}{2937} M$

и т. д.

Во всѣхъ случаяхъ, какъ мы видимъ, это математическое ожиданіе число отрицательное; слѣдовательно лотерея, о которой идетъ рѣчь, представляетъ игру далеко не безобидную.

Этому выводу соотвѣтствуетъ тотъ фактъ, что лотерея приносила и продолжаетъ приносить значительную выгоду устроителямъ ея.

§ 22. *Задача 3ья.* Изъ сосуда, содержащаго n билетовъ съ нумерами

$$1, 2, 3, \ldots, n$$

и никакихъ другихъ, вынимаютъ одновременно m билетовъ, что мы назовемъ первымъ тиражемъ. Затѣмъ вынутые билеты возвращаютъ въ сосудъ и производятъ подобный же второй тиражъ m билетовъ. По окончаніи второго тиража вынутые билеты возвращаютъ также въ сосудъ и производятъ третій тиражъ и т. д.

Требуется при k такихъ тиражахъ опредѣлить:

1) вѣроятность, что i опредѣленныхъ нумеровъ не появятся;

2) вѣроятность, что i опредѣленныхъ нумеровъ не появятся, а другіе l опредѣленныхъ нумеровъ появятся;

3) вѣроятность, что l опредѣленныхъ нумеровъ появятся;

4) вѣроятность, что появятся только l опредѣленныхъ нумеровъ; 5) вѣроятность, что появятся всѣ нумера.

Рѣшеніе. Положимъ для краткости

$$\left\{\frac{p(p-1)\ldots.(p-m+1)}{1.2\ldots.m}\right\}^k = Z_p,$$

каково бы ни было число p.

При каждомъ тиражѣ нумера вынутыхъ билетовъ могутъ представлять любую совокупность m чиселъ изъ всѣхъ n чиселъ

$$1,\ 2,\ldots.,\ n.$$

Соотвѣтственно этому при одномъ тиражѣ различимъ

$$\frac{n(n-1)\ \ldots(n-m+1)}{1.2\ldots.m}$$

равновозможныхъ случаевъ, а при всѣхъ k тиражахъ различимъ

$$\left\{\frac{n(n-1)\ldots.(n-m+1)}{1.2\ldots.m}\right\}^k = Z_n$$

равновозможныхъ случаевъ.

Каждый изъ послѣднихъ случаевъ, единственно возможныхъ и несовмѣстимыхъ, состоитъ въ появленіи k опредѣленныхъ совокупностей m нумеровъ, при разсматриваемыхъ нами k тиражахъ. Установивъ такимъ образомъ тѣ случаи, которые мы будемъ разсматривать, и указавъ общее число ихъ, займемся для опредѣленія вѣроятностей событій, упомянутыхъ въ задачѣ, счетомъ числа благопріятствующихъ имъ случаевъ.

Если i опредѣленныхъ нумеровъ

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots.,\ \alpha_i$$

не появляются, то для одного тиража вмѣсто

$$\frac{n(n-1)\ldots.(n-m+1)}{1.2\ldots.m}$$

остается

$$\frac{(n-i)(n-i-1)\ldots.(n-i-m+1)}{1.2\ldots.m}$$

случаевъ, а для k тиражей вмѣсто

$$\left\{\frac{n(n-1)\ldots.(n-m+1)}{1.2\ldots.m}\right\}^k = Z_n$$

имѣемъ

$$\left\{\frac{(n-i)(n-i-1)\ldots.(n-i-m+1)}{1.2\ldots.m}\right\}^k = Z_{n-i}$$

случаевъ. Слѣдовательно вѣроятность, что при k разсматриваемыхъ нами тиражахъ i опредѣленныхъ нумеровъ не появятся, выражается дробью

$$\frac{Z_{n-i}}{Z_n} = \left\{\frac{(n-i)(n-i-1)\ldots.(n-i-m+1)}{n(n-1)\ldots.(n-m+1)}\right\}^k.$$

Затѣмъ число случаевъ, при которыхъ не появляются i опредѣленныхъ нумеровъ

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_i$$

и появляется одинъ также опредѣленный нумеръ β_1, можно выразить разностью

$$\Delta Z_{n-i-1} = Z_{n-i} - Z_{n-i-1},$$

гдѣ Z_{n-i}, согласно только что сказанному, представляетъ число всѣхъ случаевъ, при которыхъ не появляются нумера

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_i,$$

а Z_{n-i-1} число тѣхъ изъ этихъ случаевъ, при которыхъ кромѣ нумеровъ

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_i$$

не появляется также и нумеръ β_1. Подобнымъ же образомъ число случаевъ, при которыхъ не появляются i опредѣленныхъ нумеровъ

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_i$$

и появляются два опредѣленныхъ нумера, можно выразить второю разностью

$$\Delta^2 Z_{n-i-2} = \Delta Z_{n-i-1} - \Delta Z_{n-i-2},$$

гдѣ ΔZ_{n-i-1} представляетъ число всѣхъ случаевъ, при которыхъ появляется нумеръ β_1 и не появляются нумера

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_i,$$

а ΔZ_{n-i-2} число тѣхъ изъ этихъ случаевъ, при которыхъ кромѣ нумеровъ

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_i$$

не появляется также нумеръ β_2. Въ виду возможности продолженія подобныхъ разсужденій не трудно заключить, что, вообще, число случаевъ, при которыхъ не появляются i опредѣленныхъ нумеровъ и появляются другіе l опредѣленныхъ нумеровъ, можно представить разностью $l^{\text{го}}$ порядка

$$\Delta^l Z_{n-i-l},$$

которая равна

$$Z_{n-i} - \frac{l}{1} Z_{n-i-1} + \frac{l(l-1)}{1.2} Z_{n-i-2} - \ldots \pm Z_{n-i-l}.$$

Итакъ вѣроятность, что при k разсматриваемыхъ нами тиражахъ i опредѣленныхъ нумеровъ не появятся, а другіе l опредѣленныхъ нумеровъ появятся, равна

$$\frac{\Delta^l Z_{n-i-l}}{Z_n}.$$

Прочія вѣроятности, упомянутыя въ задачѣ, представляютъ три частныхъ случая только что найденной вѣроятности и потому могутъ быть получены изъ выраженія

$$\frac{\Delta^l Z_{n-i-l}}{Z_n}$$

при частныхъ предположеніяхъ относительно i и l:

$$1)\ i = 0, \quad 2)\ i = n - l, \quad 3)\ i = 0,\ l = n.$$

Полагая $i = 0$, получаемъ нижеслѣдующее выраженіе вѣроятности появленія l опредѣленныхъ нумеровъ:

$$\frac{\Delta^l Z_{n-l}}{Z_n} = 1 - \frac{l}{1}\left(\frac{n-m}{n}\right)^k + \frac{l(l-1)}{1.2}\left(\frac{n-m}{n}\right)^k\left(\frac{n-m-1}{n-1}\right)^k - \ldots.$$

Полагая же $i = n - l$, находимъ, что вѣроятность появленія l опредѣленныхъ нумеровъ и не появленія остальныхъ равна

$$\frac{\Delta^l Z_0}{Z_n} = \frac{Z_l}{Z_n} - \frac{l}{1}\frac{Z_{l-1}}{Z_n} + \frac{l(l-1)}{1.2}\frac{Z_{l-2}}{Z_n} - \ldots$$
$$= \left(\frac{n-m}{n}\right)^k\left(\frac{n-m-1}{n-1}\right)^k \ldots \left(\frac{l-m+1}{l+1}\right)^k\left\{1 - \frac{l}{1}\left(\frac{l-m}{l}\right)^k + \ldots\right\}.$$

Наконецъ вѣроятность появленія всѣхъ n нумеровъ равна

$$\frac{\Delta^n Z_0}{Z_n} = 1 - \frac{n}{1}\left(\frac{n-m}{n}\right)^k + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{n-m}{n}\right)^k\left(\frac{n-m-1}{n-1}\right)^k - \ldots.$$

Останавливаясь на послѣдней формулѣ и замѣчая, что при большихъ значеніяхъ n она требуетъ утомительныхъ вычисленій, выведемъ изъ нея двѣ приближенныхъ формулы. Для полученія первой приближенной формулы положимъ, что всѣ числа

$$\left(\frac{n-m-1}{n-1}\right)^k, \left(\frac{n-m-2}{n-2}\right)^k, \ldots$$

равны числу

$$\left(\frac{n-m}{n}\right)^k,$$

которое для краткости обозначимъ буквою t.

При такомъ допущеніи указанная формула тотчасъ даетъ

$$\frac{\Delta^n Z_0}{Z_n} \mp (1-t)^n, \quad \text{гдѣ} \quad t = \left(\frac{n-m}{n}\right)^k.$$

Для второго приближенія замѣтимъ, что при небольшихъ значеніяхъ i отношеніе

$$\left(\frac{n-m-i}{n-i}\right)^k : \left(\frac{n-m}{n}\right)^k,$$

равное

$$\left\{1 - \frac{im}{(n-i)(n-m)}\right\}^k,$$

мало отличается отъ

$$1 - \frac{kim}{n(n-m)}$$

и произведеніе

$$\left(1 - \frac{km}{n(n-m)}\right)\left(1 - \frac{2km}{n(n-m)}\right) \ldots \left(1 - \frac{ikm}{n(n-m)}\right)$$

мало отличается отъ

$$1 - \frac{km(1+2+\ldots+i)}{n(n-m)} = 1 - \frac{kmi(i+1)}{2n(n-m)}.$$

На этомъ основаніи за приближенную величину каждаго произведенія

$$\left(\frac{n-m}{n}\right)^k \left(\frac{n-m-1}{n-1}\right)^k \ldots \left(\frac{n-m-i}{n-i}\right)^k$$

мы примемъ

$$t^{i+1}\left(1 - \frac{kmi(i+1)}{2n(n-m)}\right).$$

Подставляя въ формулу это приближенное выраженіе вмѣ-

сто точнаго, получаемъ

$$\frac{\Delta^n Z_0}{Z_n} \doteq (1-t)^n - \frac{kmt^2(n-1)}{2(n-m)}(1-t)^{n-2} \doteq (1-t)^n \left\{1 - \frac{kmt^2}{2}\right\},$$

такъ какъ числа

$$\frac{n-1}{n-m} \text{ и } \frac{1}{(1-t)^2}$$

мы предполагаемъ близкими къ единицѣ.

Приложимъ наши приближенныя формулы къ разысканію числа тиражей по условію, чтобы вѣроятность появленія всѣхъ нумеровъ была приблизительно равна данному числу $\frac{1}{C}$.

Первая приближенная формула даетъ:

$$(1-t)^n \doteq \frac{1}{C},$$

откуда выводимъ

$$n \log(1-t) \doteq -nt \doteq -\log C;$$

но

$$t = \left(\frac{n-m}{n}\right)^k$$

и потому

$$\log t = k \log\left(1 - \frac{m}{n}\right) \doteq -\frac{km}{n}.$$

Сопоставляя же приближенныя равенства

$$-nt \doteq -\log C \quad \text{и} \quad \log t \doteq -\frac{km}{n},$$

находимъ

$$k \doteq \frac{n(\log n - \log\log C)}{m}.$$

Въ дальнѣйшихъ вычисленіяхъ положимъ

$$\frac{\log C}{n} = t_0 \quad \text{и} \quad \frac{n(\log n - \log\log C)}{m} = k_0;$$

такъ что t_0 и k_0 будутъ приближенными значеніями чиселъ t и k.

Второе приближенное выраженіе вѣроятности даетъ

$$(1-t)^n \left(1 - \frac{kmt^2}{2}\right) \doteq \frac{1}{C},$$

откуда, производя приближенныя вычисленія, выводимъ

$$\log C \doteq nt + \frac{nt^2}{2} + \frac{kmt^2}{2} \doteq nt + \frac{(n + k_0 m) t_0^2}{2},$$

$$t \doteq \frac{\log C}{n}\left[1 - \frac{(n + k_0 m) t_0^2}{2 \log C}\right]$$

и затѣмъ

$$-\log t \doteq \log n - \log\log C + \frac{(n + k_0 m)\, t_0^2}{2 \log C}.$$

Съ другой стороны имѣемъ

$$-\log t = -k \log\left(1 - \frac{m}{n}\right) \doteq \frac{km}{n} + \frac{k_0 m^2}{2n^2}.$$

Приравнивая наконецъ одно приближенное выраженіе $\log t$ другому, приходимъ къ такому приближенному равенству

$$\frac{km}{n} + \frac{k_0 m^2}{2n^2} \doteq \log n - \log\log C + \frac{(n + k_0 m)\log C}{2n^2},$$

изъ котораго легко выводимъ

$$k \doteq \frac{n}{m}\left\{\log n - \log\log C + \frac{k_0 m}{2n^2}(\log C - m) + \frac{1}{2n}\log C\right\}$$

$$\doteq \frac{1}{m}\left\{(\log n - \log\log C)\left(n + \frac{1}{2}\log C - \frac{m}{2}\right) + \frac{1}{2}\log C\right\}.$$

Для примѣра положимъ

$$n = 90, \quad m = 5, \quad C = 2.$$

Тогда

$\log n = \quad 4{,}4998\ldots,$ $\qquad \log C = \ 0{,}69314\ldots$

$\log\log C = -0{,}3665\ldots,$ $\quad n + \frac{1}{2}\log C - \frac{m}{2} = 87{,}84657\ldots$

и, произведя простыя выкладки, по послѣдней приближенной формулѣ получаемъ

$$k \doteq \frac{4{,}8663 \times 87{,}8466 + 0.346}{5} \doteq 85{,}5.$$

Соотвѣтственно этому результату можно убѣдиться, что вѣроятность появленія всѣхъ 90 нумеровъ при 85 тиражахъ нѣсколько меньше половины, а при 86 тиражахъ уже больше половины.

§ 23. *Задача 4ая*. Два игрока, которыхъ мы назовемъ L и M, играютъ въ нѣкоторую игру, состоящую изъ послѣдовательныхъ партій. Каждая отдѣльная партія должна окончиться для одного изъ двухъ игроковъ L и M выигрышемъ ея, а для дру-

гого проигрышемъ, при чемъ вѣроятность выиграть ее для L равна p, а для M равна $q=1-p$, независимо отъ результатовъ другихъ партій. Вся игра окончится, когда L выиграетъ l партій или M выиграетъ m партій: въ первомъ случаѣ игру выиграетъ L, а во второмъ M. Требуется опредѣлить вѣроятности выиграть игру для игрока L и для игрока M, которыя мы обозначимъ символами (L) и (M).

Примѣчаніе. Эта задача извѣстна съ половины семнадцатаго столѣтія и заслуживаетъ особаго вниманія, такъ какъ въ различныхъ пріемахъ, предложенныхъ Паскалемъ и Ферматомъ для ея рѣшенія, можно видѣть начало исчисленія вѣроятностей. Первоначальная постановка задачи состояла въ томъ, какъ слѣдуетъ раздѣлить общую ставку игроковъ, если имъ приходится прервать игру до окончанія ея. Вопросъ о раздѣленіи ставки останавливалъ вниманіе ученыхъ и значительно раньше, чѣмъ Паскаль и Ферматъ рѣшили его согласно съ условіемъ безобидности игръ. Морицъ Канторъ въ своихъ «Vorlesungen über Geschichte der Mathematik» упоминаетъ, что Люка Пачіоло считалъ правильнымъ дѣлить ставку пропорціонально числамъ выигранныхъ партій, а Карданъ предложилъ болѣе сложное правило.

Первое рѣшеніе. Прежде всего замѣтимъ, что игра можетъ быть выиграна игрокомъ L въ различное число партій, не меньшее l и не большее $l+m-1$.

Поэтому, въ силу теоремы сложенія вѣроятностей, мы можемъ представить искомую вѣроятность (L) въ видѣ суммы

$$(L)_l+(L)_{l+1}+\ldots+(L)_{l+i}+\ldots+(L)_{l+m-1},$$

гдѣ $(L)_{l+i}$ означаетъ вообще вѣроятность, что игра окончится въ $l+i$ партій выигрышемъ игрока L.

А для того, чтобы игра была выиграна игрокомъ L въ $l+i$ партій, этотъ игрокъ долженъ выиграть $l+i^{\text{ую}}$ партію и изъ предыдущихъ $l+i-1$ партій долженъ выиграть ровно $l-1$ партій. Слѣдовательно, по теоремѣ умноженія вѣроятностей, величина $(L)_{l+i}$ должна равняться произведенію вѣроятности игроку

L выиграть $l+i^{\text{ую}}$ партію на вѣроятность выиграть, тому же игроку L, изъ $l+i-1$ партій ровно $l-1$ партій.

Послѣдняя вѣроятность, очевидно, совпадаетъ съ вѣроятностью, что въ $l+i-1$ независимыхъ испытаній появится ровно $l-1$ разъ такое событіе, вѣроятность котораго для каждаго испытанія равна p. Вѣроятность же игроку L выиграть $l+i^{\text{ую}}$ партію, какъ вѣроятность выиграть ему любую партію, равна p.

Итакъ

$$(L)_{l+i}=p\frac{1.2\ldots.(l+i-1)}{1.2\ldots.i.\,1.2\ldots.(l-1)}p^{l-1}q^i=\frac{l(l+1)\ldots.(l+i-1)}{1.2\ldots.i}p^lq^i$$

и наконецъ

$$(L)=p^l\left\{1+\frac{l}{1}q+\frac{l(l+1)}{1.2}q^2+\ldots.+\frac{l(l+1)\ldots.(l+m-2)}{1.2\ldots.(m-1)}q^{m-1}\right\}.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ

$$(M)=q^m\left\{1+\frac{m}{1}p+\frac{m(m+1)}{1.2}p^2+\ldots.+\frac{m(m+1)\ldots.(m+l-2)}{1.2\ldots.(l-1)}p^{l-1}\right\}.$$

Достаточно, впрочемъ, вычислить одну изъ этихъ величинъ, такъ какъ сумма ихъ

$$(L)+(M)$$

должна приводиться къ единицѣ.

Второе рѣшеніе. Замѣчая, что для окончанія игры требуется не болѣе $l+m-1$ партій, положимъ, что игроки не прекращаютъ ее тотчасъ по достиженіи однимъ изъ нихъ надлежащаго числа выигранныхъ партій, а продолжаютъ играть до тѣхъ поръ, пока не будетъ сыграно ровно $l+m-1$ партій.

При такомъ предположеніи вѣроятность выиграть игру для игрока L равняется вѣроятности выиграть, тому же игроку L, изъ всѣхъ $l+m-1$ партій не менѣе l партій.

Въ самомъ дѣлѣ, если игра выиграна игрокомъ L, то число выигранныхъ имъ партій достигаетъ величины l и послѣдующія затѣмъ партіи могутъ только увеличить это число, или оставить его безъ измѣненія. И обратно, если изъ $l+m-1$ партій игрокъ L выиграетъ не менѣе l партій, то число партій, выигранныхъ игрокомъ M, будетъ меньше m; откуда слѣдуетъ, что въ

этомъ случаѣ игрокъ L выиграетъ l партій, прежде чѣмъ игрокъ M успѣетъ выиграть m партій, и такимъ образомъ игра будетъ выиграна игрокомъ L.

Съ другой стороны, вѣроятность игроку L выиграть изъ $l+m-1$ партій не менѣе l партій совпадаетъ съ вѣроятностью, что въ $l+m-1$ независимыхъ испытаній появится не менѣе l разъ такое событіе, вѣроятность котораго при каждомъ испытаніи равна p. Послѣдняя же вѣроятность выражается извѣстною суммою произведеній

$$\frac{1.2....(l+m-1)}{1.2....(l+i)\,1.2....(m-i-1)} p^{l+i} q^{m-i-1},$$

гдѣ

$$i=0,\ 1,\ 2, ..., m-1.$$

Итакъ

$$(L)=\frac{(l+m-1)....m}{1.2....l} p^l q^{m-1} \left\{1+\frac{m-1}{l+1}\cdot\frac{p}{q}+\frac{m-1}{l+1}\cdot\frac{m-2}{l+2}\cdot\frac{p^2}{q^2}+....\right\};$$

совершенно такъ же найдемъ

$$(M)=\frac{(l+m-1)....l}{1.2....m} p^{l-1} q^m \left\{1+\frac{l-1}{m+1}\cdot\frac{q}{p}+\frac{l-1}{m+1}\cdot\frac{l-2}{m+2}\cdot\frac{q^2}{p^2}+....\right\}.$$

Не трудно убѣдиться, что эти новыя выраженія (L) и (M) равны найденнымъ прежде.

Численные примѣры.

$$1)\ p=q=\frac{1}{2},\ l=1,\ m=2.$$

$$(L)=p(1+q)=2pq\left(1+\frac{1}{2}\frac{p}{q}\right)=\frac{3}{4},\ (M)=q^2=\frac{1}{4}.$$

$$2)\ p=\frac{2}{5},\ q=\frac{3}{5},\ l=2,\ m=3.$$

$$(L)=p^2\{1+2q+3q^2\}=6p^2q^2\left\{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{p}{q}+\frac{1}{6}\frac{p^2}{q^2}\right\}=\frac{328}{625}$$

$$(M)=q^3\{1+3p\}=4q^3p\left\{1+\frac{1}{4}\frac{q}{p}\right\}=\frac{297}{625}.$$

Задача 5ая. Три игрока

$$L,\ M,\ N$$

играютъ въ игру, состоящую изъ послѣдовательныхъ партій.

Каждая партія должна окончиться для одного изъ нихъ выигрышемъ, а для двухъ остальныхъ проигрышемъ, при чемъ вѣроятности выиграть ее для

$$L, M, N$$

соотвѣтственно равны

$$p, q, r,$$

независимо отъ результатовъ другихъ партій. Вся игра оканчивается выигрышемъ одного изъ игроковъ: именно, игру выигрываетъ тотъ, кто прежде другихъ выиграетъ назначенное для него число партій. Опредѣлить вѣроятность выиграть игру для каждаго изъ игроковъ, если для выигрыша игры L долженъ выиграть l партій, M долженъ выиграть m партій и N долженъ выиграть n партій.

Эта задача представляетъ распространеніе предыдущей на случай трехъ игроковъ.

Рѣшеніе. Разсматривая различныя стадіи игры, обозначимъ символомъ

$$L_{x, y, z}$$

вѣроятность, что игру выиграетъ L, когда игрокамъ

$$L, M, N$$

для выигрыша игры остается выиграть соотвѣтственно

$$x, y, z$$

партій. Пока игра не окончена, ни одно изъ чиселъ x, y, z не нуль. Обращеніе же одного изъ нихъ въ нуль указываетъ на окончаніе игры: при $x = 0$ игра выиграна игрокомъ L и тогда вѣроятность выигрыша игры для L равна 1; если же $y = 0$ или $z = 0$, то игра выиграна однимъ изъ двухъ другихъ игроковъ и вѣроятность выиграть ее для L равна 0.

Соотвѣтственно этому имѣемъ

$$L_{0, y, z} = 1, \quad L_{x, 0, z} = L_{x, y, 0} = 0,$$

гдѣ подъ x, y, z мы подразумѣваемъ числа неравныя нулю, такъ какъ выраженія

$$L_{0, 0, z}, \quad L_{0, y, 0}, \quad L_{x, 0, 0},$$

не имѣющія смысла, не встрѣчаются въ нашихъ вычисленіяхъ. Предполагая всѣ три числа x, y, z отличными отъ нуля, установимъ теперь простую связь между величинами

$$L_{x,\,y,\,z},\ L_{x-1,\,y,\,z},\ L_{x,\,y-1,\,z},\ L_{x,\,y,\,z-1},$$

которая даетъ возможность найти $L_{x,\,y,\,z}$, когда значенія

$$L_{x-1,\,y,\,z},\ L_{x,\,y-1,\,z} \text{ и } L_{x,\,y,\,z-1}$$

уже извѣстны. Для намѣченной цѣли разсмотримъ возможные результаты одной партіи, которая непосредственно слѣдуетъ за тѣмъ положеніемъ игры, когда игрокамъ

$$L,\ M,\ N$$

для выигрыша игры остается выиграть соотвѣтственно

$$x,\ y,\ z$$

партій. Если эта партія будетъ выиграна игрокомъ L, вѣроятность чего равна p, то непосредственно по окончаніи ея вѣроятность выиграть игру игроку L обратится въ

$$L_{x-1,\,y,\,z};$$

если же эта партія будетъ выиграна игрокомъ M, вѣроятность чего равна q, то по окончаніи ея вѣроятность выиграть игру игроку L обратится въ

$$L_{x,\,y-1,\,z};$$

и наконецъ, если эта партія будетъ выиграна игрокомъ N, вѣроятность чего равна r, то по окончаніи ея вѣроятность выиграть игру игроку L будетъ равна

$$L_{x,\,y,\,z-1}.$$

Поэтому, выигрышъ игры игрокомъ L, когда для окончанія игры игрокамъ

$$L,\ M,\ N$$

остается выиграть соотвѣтственно

$$x,\ y,\ z$$

партій, мы можемъ разбить на три вида, которые отличаются другъ отъ друга результатомъ одной партіи и вѣроятности которыхъ равны произведеніямъ

$$pL_{x-1,\,y,\,z},\ qL_{x,\,y-1,\,z},\ rL_{x,\,y,\,z-1}.$$

Слѣдовательно въ силу теоремы сложенія вѣроятностей имѣемъ

$$L_{x,\,y,\,z} = pL_{x-1,\,y,\,z} + qL_{x,\,y-1,\,z} + rL_{x,\,y,\,z-1}.$$

Подобнымъ же образомъ не трудно установить равенства

$$M_{x,\,y,\,z} = pM_{x-1,\,y,\,z} + qM_{x,\,y-1,\,z} + rM_{x,\,y,\,z-1},$$
$$N_{x,\,y,\,z} = pN_{x-1,\,y,\,z} + qN_{x,\,y-1,\,z} + rN_{x,\,y,\,z-1},$$
$$M_{0,\,y,\,z} = M_{x,\,y,\,0} = 0,\ M_{x,\,0,\,z} = 1,$$
$$N_{0,\,y,\,z} = N_{x,\,0,\,z} = 0,\ N_{x,\,y,\,0} = 1,$$

гдѣ

$$M_{x,\,y,\,z} \text{ и } N_{x,\,y,\,z}$$

означаютъ вѣроятности выиграть игру игрокамъ M и N, когда для окончанія игры игрокамъ L, M, N остается выиграть соотвѣтственно x, y, z партій.

Не останавливаясь затѣмъ на составленіи общихъ формулъ для выраженія искомыхъ вѣроятностей

$$L_{l,\,m,\,n},\ M_{l,\,m,\,n},\ N_{l,\,m,\,n}$$

при произвольныхъ значеніяхъ l, m, n, замѣтимъ только, что указанныя нами равенства даютъ возможность найти эти вѣроятности для любой данной системы чиселъ l, m, n. Дѣйствительно, при помощи этихъ равенствъ, послѣдовательно находимъ

$$L_{1,\,1,\,1} = p, \qquad M_{1,\,1,\,1} = q,\ N_{1,\,1,\,1} = r$$
$$L_{1,\,1,\,2} = pL_{0,\,1,\,2} + qL_{1,\,0,\,2} + rL_{1,\,1,\,1} = p + rp$$
$$L_{1,\,2,\,1} = p + qp,\ L_{2,\,1,\,1} = p^2$$
$$M_{1,\,1,\,2} = q + rq,\ M_{2,\,1,\,1} = q + pq,\ M_{1,\,2,\,1} = q^2$$
$$N_{1,\,1,\,2} = r^2,\ N_{1,\,2,\,1} = r + qr,\ N_{2,\,1,\,1} = r + pr$$

$$L_{1,1,3}=pL_{0,1,3}+qL_{1,0,3}+rL_{1,1,2}=p+r(p+rp)$$
$$=p(1+r+r^2)$$

$$L_{1,2,2}=pL_{0,2,2}+qL_{1,1,2}+rL_{1,2,1}=p+q(p+rp)+r(p+qp)$$
$$=p(1+q+r+2qr)$$

$$L_{2,1,2}=pL_{1,1,2}+qL_{2,0,2}+rL_{2,1,1}=p(p+rp)+p^2r=p^2(1+2r)$$

$$L_{1,3,1}=p(1+q+q^2),\ L_{2,2,1}=p^2(1+2q)$$

$$L_{3,1,1}=pL_{2,1,1}+qL_{3,0,1}+rL_{3,1,0}=p^3$$

$$M_{1,1,3}=q(1+r+r^2),\ M_{1,2,2}=q^2(1+2r),\ M_{1,3,1}=q^3$$

$$M_{2,2,1}=q^2(1+2p),\ M_{2,1,2}=q(1+p+r+2pr),$$
$$M_{3,1,1}=q(1+p+p^2)$$

$$N_{1,1,3}=r^3,\ N_{1,2,2}=r^2(1+2q),\ N_{1,3,1}=r(1+q+q^2)$$

$$N_{2,2,1}=r(1+p+q+2pq),\ N_{2,1,2}=r^2(1+2p),$$
$$N_{3,1,1}=r(1+p+p^2)$$

$$L_{1,2,3}=pL_{0,2,3}+qL_{1,1,3}+rL_{1,2,2}$$
$$=p+qp(1+r+r^2)+rp(1+q+r+2qr)$$
$$=p(1+q+r+r^2+2qr+3qr^2)$$

и т. д.

Примѣръ. $l=1,\ m=2,\ n=3,\ p=q=r=\frac{1}{3}$.

Вѣроятность выиграть игру для игрока L равна

$$L_{1,2,3}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\right)=\frac{19}{27};$$

затѣмъ вѣроятность выиграть ее для игрока M равна

$$M_{1,2,3}=qM_{1,1,3}+rM_{1,2,2}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{27}\right)=\frac{6}{27},$$

и наконецъ для третьяго игрока вѣроятность выиграть игру равна

$$1-\frac{19}{27}-\frac{6}{27}=\frac{2}{27}.$$

Ограничиваясь частнымъ случаемъ, приведемъ другой выводъ искомыхъ вѣроятностей. Именно, прежде всего замѣтимъ, что для окончанія игры, при

$$l = 1,\ m = 2,\ n = 3,$$

потребуется не болѣе четырехъ партій, и затѣмъ для установленія равновозможныхъ случаевъ положимъ, что игроки сыграютъ четыре партіи, хотя бы игра и была уже выиграна раньше тѣмъ или другимъ изъ нихъ. Тогда, имѣя въ виду порядокъ этихъ партій и три возможныхъ результата каждой партіи, состоящіе въ выигрышѣ ея однимъ изъ трехъ игроковъ, мы можемъ различить $3^4 = 81$ равновозможныхъ случаевъ.

Изъ этихъ 81 случаевъ благопріятствуютъ выигрышу игры игрокомъ L тѣ, въ которыхъ онъ выигрываетъ одну партію, прежде чѣмъ M выигрываетъ двѣ партіи и прежде чѣмъ N выигрываетъ три партіи.

Прямой счетъ числа такихъ случаевъ не представляетъ затрудненій; но еще скорѣе можно сосчитать число остальныхъ случаевъ, неблагопріятствующихъ выигрышу игры игрокомъ L.

Именно, не благопріятствуютъ выигрышу игры игрокомъ L, кромѣ $2^4 = 16$ случаевъ, въ которыхъ онъ не выигрываетъ ни одной партій, только слѣдующіе 8 случаевъ:

$$NNNL,\ MMML,\ MMNL,\ MNML,$$
$$NMML,\ MMLN,\ MMLM,\ MMLL,$$

въ которыхъ игрокъ L выигрываетъ первую партію уже послѣ выигрыша игры однимъ изъ своихъ противниковъ.

Отсюда тотчасъ заключаемъ, что вѣроятность выиграть игру для игрока L равна

$$\frac{81-24}{81} = \frac{57}{81} = \frac{19}{27}.$$

Затѣмъ не трудно видѣть, что игрокъ N выигрываетъ игру въ шести случаяхъ:

$$NNNN,\ NNNL,\ NNNM,\ NNMN,\ NMNN,\ MNNN;$$

и потому остальные

$$24 - 6 = 18$$

случаевъ должны благопріятствовать выигрышу игры игрокомъ *M*. Слѣдовательно вѣроятности выиграть игру для игроковъ *M* и *N* соотвѣтственно равны

$$\frac{18}{81} = \frac{2}{9} \text{ и } \frac{6}{81} = \frac{2}{27},$$

согласно прежнему выводу.

Интересно замѣтить, что ложныя рѣшенія этой старинной задачи встрѣчаются въ книгахъ XIX и XX столѣтій. Мы находимъ, напримѣръ, въ книгѣ Ліагра (J. B. J. Liagre) «Calcul des probabilités», 1879-го года, указаніе на невѣрное рѣшеніе задачи, для только что разсмотрѣннаго частнаго случая, въ математическомъ лексиконѣ Монферье, гдѣ принято, будто бы игра должна окончиться въ 3 партіи. Но это справедливое замѣчаніе сопровождается новой ошибкой: изъ вышеперечисленныхъ восьми случаевъ забытъ послѣдній

$$MMLL,$$

въ силу чего вмѣсто правильныхъ чиселъ 57 и 18 получено 58 и 17. А въ XX столѣтіи астрономъ Брунсъ на 51 страницѣ упомянутой мною книги «Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre», отнесясь слишкомъ легко къ этой задачѣ, даетъ ошибочное общее рѣшеніе ея: а именно, онъ прямо переноситъ на случай многихъ игроковъ то рѣшеніе, которое у насъ названо вторымъ.

§ 24. *Задача 6ая*. Двое

$$L \text{ и } M$$

играютъ въ игру, состоящую изъ послѣдовательныхъ партій.

Каждая партія должна окончиться для одного изъ нихъ выигрышемъ, а для другого проигрышемъ, при чемъ вѣроятности выиграть ее для *L* и *M* соотвѣтственно равны p и $q = 1 - p$.

Конецъ игры опредѣляется разностью между числомъ партій, выигранныхъ однимъ игрокомъ, и числомъ партій, выигран-

ныхъ другимъ игрокомъ. Именно, игру выиграетъ L, какъ только число выигранныхъ имъ партій превыситъ число партій, выигранныхъ игрокомъ M, на a единицъ; напротивъ, игру выиграетъ M, какъ только число выигранныхъ имъ партій превыситъ число партій, выигранныхъ игрокомъ L, на b единицъ. Требуется вычислить вѣроятности выиграть игру для L и для M.

Примѣчаніе. Прежде чѣмъ приступить къ рѣшенію поставленной задачи, представимъ условіе окончанія игры въ другой формѣ. Пусть капиталы L и M выражаются соотвѣтственно числами b и a; пусть вмѣстѣ съ тѣмъ за каждую партію выигравшій ее получаетъ отъ проигравшаго одну единицу капитала.

Тогда окончаніе игры обусловливается разореніемъ одного изъ игроковъ, и выигрываетъ ее тотъ, кому удастся разорить противника. Дѣйствительно, если будетъ сыграно $i + j$ партій и изъ нихъ будетъ выиграно i партій игрокомъ L и j партій игрокомъ M, то въ силу установленнаго нами условія капиталы L и M обратятся соотвѣтственно въ

$$b + i - j \text{ и } a + j - i$$

единицъ капитала. И, если эти $i + j$ партій приведутъ игру къ концу, то должно быть

$$i - j = a, \quad \text{или} \quad j - i = b$$

и соотвѣтственно

$$a + j - i = 0, \quad \text{или} \quad b + i - j = 0.$$

Рѣшеніе. Разсматривая различныя стадіи игры и имѣя въ виду вторую форму условія окончанія ея, обозначимъ символомъ y_x вѣроятность *) выиграть игру для игрока L въ то время, когда его капиталъ выражается числомъ x. Число x, въ теченіи игры, можетъ принимать только такія значенія

$$0,\ 1,\ 2, \ldots,\ a + b;$$

---

*) Въ данномъ случаѣ, какъ и во многихъ другихъ, находя искомую вѣроятность изъ уравненія, мы прежде всего должны признать несомнѣннымъ ея существованіе, какъ вполнѣ опредѣленной, хотя и неизвѣстной намъ величины.

а въ началѣ игры x равно b, и потому искомая нами вѣроятность выиграть игру игроку L, пока не сыграно ни одной партіи, представляется при установленномъ нами обозначеніи символомъ

$$y_b.$$

Замѣтимъ, что игра оканчивается при $x=0$ и при $x=a+b$ и что y_0 равно нулю, а y_{a+b} равно единицѣ, такъ какъ обращеніе капитала L въ нуль указываетъ на проигрышъ имъ игры, соединеніе же у игрока L капиталовъ обоихъ игроковъ влечетъ за собою выигрышъ имъ игры.

Предполагая затѣмъ x отличнымъ отъ 0 и отъ $a+b$, установимъ простую связь между величинами

$$y_x,\ y_{x+1} \text{ и } y_{x-1}.$$

Для этой цѣли разсмотримъ возможные результаты одной партіи, которая непосредственно слѣдуетъ за тѣмъ положеніемъ игры, когда капиталъ L выражается числомъ x.

Если эта партія будетъ выиграна игрокомъ L, вѣроятность чего равна p, то непосредственно по окончаніи ея вѣроятность выиграть игру игроку L обратится въ y_{x+1}; если же эта партія будетъ выиграна игрокомъ M, вѣроятность чего равна q, то по окончаніи ея вѣроятность выиграть игру игроку L обратится въ y_{x-1}. Отсюда не трудно заключить, что въ силу теоремъ сложенія и умноженія вѣроятностей должно быть

$$y_x = py_{x+1} + qy_{x-1}.$$

Такимъ образомъ разысканіе y_x сводится къ рѣшенію линейнаго уравненія

$$y_x = py_{x+1} + qy_{x-1}$$

при условіяхъ

$$y_0 = 0 \text{ и } y_{a+b} = 1.$$

Рѣшеніе подобныхъ уравненій излагается въ исчисленіи конечныхъ разностей. Согласно выводамъ исчисленія конечныхъ разностей, общее рѣшеніе уравненія

$$y_x = py_{x+1} + qy_{x-1}$$

опредѣляется корнями обыкновеннаго уравненія второй степени

$$\xi = p\xi^2 + q,$$

при чемъ слѣдуетъ различить два случая.

Въ силу равенства

$$p + q = 1$$

одинъ изъ корней уравненія

$$\xi = p\xi^2 + q$$

равенъ единицѣ, а другой $\frac{q}{p}$. Если p не равно q, то числа

$$1 \text{ и } \frac{q}{p}$$

различны между собой и на основаніи выводовъ исчисленія конечныхъ разностей должно быть

$$y_x = C + D\left(\frac{q}{p}\right)^x,$$

гдѣ C и D числа постоянныя.

Для опредѣленія постоянныхъ имѣемъ два уравненія

$$y_0 = 0 \text{ и } y_{a+b} = 1,$$

изъ которыхъ выводимъ

$$C = -D = \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} = \frac{p^{a+b}}{p^{a+b} - q^{a+b}}.$$

Итакъ

$$y_x = \frac{p^{a+b-x}(p^x - q^x)}{p^{a+b} - q^{a+b}}$$

и

$$y_b = \frac{p^a(p^b - q^b)}{p^{a+b} - q^{a+b}},$$

если только p не равно q. Если же $p = q$, то

$$y_x = A + Bx,$$

гдѣ A и B числа постоянныя. Для опредѣленія постоянныхъ имѣемъ попрежнему два уравненія

$$y_0 = 0 \text{ и } y_{a+b} = 1,$$

изъ которыхъ выводимъ

$$A = 0 \quad \text{и} \quad B = \frac{1}{a+b}.$$

Итакъ при $p = q$ находимъ

$$y_x = \frac{x}{a+b} \quad \text{и} \quad y_b = \frac{b}{a+b}.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что для игрока M вѣроятность выиграть игру, пока не сыграно ни одной партіи, равна

$$\frac{q^b (q^a - p^a)}{q^{a+b} - p^{a+b}} = \frac{q^b (p^a - q^a)}{p^{a+b} - q^{a+b}},$$

если только p не равно q, и обращается въ

$$\frac{a}{a+b}$$

при $p = q$. Сумма вѣроятностей выиграть игру тому и другому игроку составляетъ единицу, какъ и слѣдовало ожидать, такъ какъ по предположенію игра продолжается до тѣхъ поръ, пока одинъ изъ игроковъ не выиграетъ ея. Однако въ данномъ случаѣ вѣроятность равная единицѣ не указываетъ на достовѣрность выигрыша игры тѣмъ или другимъ изъ игроковъ, такъ какъ игра можетъ продолжаться безъ конца.

Каждая партія въ отдѣльности представляетъ безобидную игру при $p = q$ и не безобидную въ противномъ случаѣ, когда p не равно q. Сообразно этому, найденное нами выраженіе y_b при $p = q$ приводитъ къ слѣдующему заключенію.

Если нѣкто рѣшилъ повторять безобидную игру до пріобрѣтенія назначенной напередъ суммы или до своего разоренія и если къ такому повторенію нѣтъ препятствій, то вѣроятности пріобрѣтенія имъ назначенной суммы и его разоренія обратно пропорціональны величинѣ этой суммы и его капиталу.

Это заключеніе, выведенное нами изъ разсмотрѣнія одного частнаго случая, относится ко всѣмъ безобиднымъ играмъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если капиталъ игрока выражается числомъ a, сумма же, пріобрѣтеніе которой составляетъ цѣль многократ-

наго повторенія имъ игры, выражается числомъ b, то при сдѣланныхъ нами предположеніяхъ многократное повтореніе игры должно дать игроку прибыль, выражаемую числомъ b, или убытокъ, величина котораго выражается числомъ a.

И потому математическое ожиданіе прибыли игрока отъ такого повторенія игры выразится разностью

$$Xb - Ya,$$

гдѣ X вѣроятность пріобрѣтенія назначенной суммы, Y вѣроятность разоренія игрока. Но повтореніе безобидной игры само должно представлять также игру безобидную; слѣдовательно

$$Xb - Ya = 0,$$

откуда находимъ
$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = \frac{X+Y}{a+b} = \frac{1}{a+b}.$$

Въ тѣхъ случаяхъ, когда сумма, по пріобрѣтеніи которой игрокъ рѣшилъ прекратить игру, велика по сравненію съ его капиталомъ, вѣроятность разоренія игрока близка къ единицѣ.

Въ предѣльномъ же случаѣ, когда игрокъ не довольствуется никакою суммою, должно положить $b = \infty$ и вѣроятность разоренія обращается въ единицу. Итакъ, если повтореніе безобидной игры ограничено только разореніемъ игрока, то по найденной нами формулѣ вѣроятность разоренія равна единицѣ, хотя это разореніе можетъ никогда не наступить.

Устраняя вѣчную игру, ограничимъ теперь число играемыхъ партій; мы преобразуемъ такимъ образомъ задачу 6ую въ слѣдующую.

Задача 7ая. При соблюденіи всѣхъ условій задачи 6ой, требуется вычислить вѣроятность, что игра будетъ выиграна игрокомъ L не позже, какъ въ n партій. Другими словами, требуется вычислить вѣроятность разоренія игрока M при условіи, что общее число партій не превзойдетъ n.

Рѣшеніе. Обозначимъ символомъ

$$y_{t,s}$$

вѣроятность выиграть игру игроку L въ томъ случаѣ, когда капиталъ M выражается числомъ t и нельзя сыграть болѣе s партій.

При такихъ обозначеніяхъ искомая нами вѣроятность разоренія игрока M представится символомъ

$$y_{a,n};$$

вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$y_{0,s}=1,\ y_{a+b,s}=0 \text{ и } y_{t,0}=0,$$

гдѣ

$$s \overline{\geq} 0 \text{ и } t>0.$$

Съ другой стороны, разсматривая, подобно прежнему, возможные результаты одной партіи, легко приходимъ къ уравненію

$$y_{t,s}=py_{t-1,s-1}+qy_{t+1,s-1},$$

гдѣ

$$s \overline{\geq} 1 \text{ и } 0<t<a+b.$$

Остается рѣшить это уравненіе при вышеуказанныхъ условіяхъ

$$y_{0,s}=1,\ y_{a+b,s}=0,\ y_{t,0}=0.$$

Пользуясь способомъ Лапласа, мы сведемъ разысканіе $y_{t,s}$ къ разложенію нѣкоторой функціи вспомогательнаго перемѣннаго ξ по степенямъ этого перемѣннаго. Пусть

$$\varphi_t(\xi)=y_{t,0}+y_{t,1}\xi+y_{t,2}\xi^2+\ldots+y_{t,s}\xi^s+\ldots$$

Тогда

$$\varphi_{t+1}(\xi)=y_{t+1,0}+y_{t+1,1}\xi+\ldots+y_{t+1,s-1}\xi^{s-1}+\ldots$$

и

$$\varphi_{t-1}(\xi)=y_{t-1,0}+y_{t-1,1}\xi+\ldots+y_{t-1,s-1}\xi^{s-1}+\ldots$$

и въ силу уравненія

$$y_{t,s}=py_{t-1,s-1}+qy_{t+1,s-1}$$

имѣемъ

$$\varphi_t(\xi)-p\xi\varphi_{t-1}(\xi)-q\xi\varphi_{t+1}(\xi)=y_{t,0}=0,$$

при

$$t \overline{\geq} 1.$$

На этомъ основаніи, согласно общимъ выводамъ исчисленія

конечныхъ разностей, можемъ положить

$$\varphi_t(\xi) = U\theta^t + V\eta^t,$$

гдѣ U и V функціи одного числа ξ, не зависящія отъ t, величины же θ и η опредѣляются равенствами

$$\theta = \frac{1 + \sqrt{1 - 4pq\xi^2}}{2q\xi} \text{ и } \eta = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pq\xi^2}}{2q\xi},$$

какъ два корня одного и того же уравненія

$$\rho - p\xi - q\xi\rho^2 = 0,$$

второй степени относительно неизвѣстнаго числа ρ.

Давая затѣмъ t значенія 0 и $a+b$, получаемъ два равенства

$$\frac{1}{1-\xi} = U + V,\ 0 = U\theta^{a+b} + V\eta^{a+b},$$

изъ которыхъ выводимъ

$$U = \frac{-\eta^{a+b}}{\theta^{a+b} - \eta^{a+b}} \frac{1}{1-\xi}$$

и

$$V = \frac{\theta^{a+b}}{\theta^{a+b} - \eta^{a+b}} \frac{1}{1-\xi},$$

и на этомъ основаніи находимъ

$$\varphi_t(\xi) = \frac{(\theta\eta)^t\,[\theta^{a+b-t} - \eta^{a+b-t}]}{\theta^{a+b} - \eta^{a+b}} \frac{1}{1-\xi}$$

$$= \frac{\eta^t}{1-\xi} \frac{1 - \left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{a+b-t}}{1 - \left(\frac{\eta}{\theta}\right)^{a+b}} = \frac{\eta^t}{1-\xi} \frac{1 - \alpha^{a+b-t}\,\eta^{2(a+b-t)}}{1 - \alpha^{a+b}\,\eta^{2(a+b)}},$$

гдѣ

$$\alpha = \frac{1}{\theta\eta} = \frac{q}{p}.$$

Итакъ искомая нами вѣроятность, обозначенная символомъ $y_{a,n}$, можетъ быть опредѣлена какъ коэффиціентъ при ξ^n въ разложеніи по степенямъ ξ выраженія

$$\varphi_a(\xi) = \frac{\eta^a}{1-\xi} \cdot \frac{1 - \alpha^b\,\eta^{2b}}{1 - \alpha^{a+b}\,\eta^{2(a+b)}}.$$

Разложеніе же полученнаго выраженія $\varphi_a(\xi)$ въ рядъ по

степенямъ ξ сводится къ разложенію различныхъ степеней η въ подобные же ряды, такъ какъ простое дѣленіе даетъ для $\varphi_a(\xi)$ такой рядъ:

$$\varphi_a(\xi) = \frac{1}{1-\xi}\{\eta^a - \alpha^b\eta^{a+2b} + \alpha^{a+b}\eta^{3a+2b} - \alpha^{a+2b}\eta^{3a+4b} + \ldots\}$$

Наконецъ для разложенія различныхъ степеней η въ ряды можно воспользоваться извѣстной формулой Лагранжа:

$$F(\zeta) = F(a) + \omega F'(a) f(a) + \frac{\omega^2}{1.2}\frac{dF'(a) f(a) f(a)}{da} + \ldots,$$

при

$$\zeta = a + \omega f(\zeta).$$

Въ данномъ случаѣ имѣемъ

$$\eta = \xi(p + q\eta^2)$$

и потому

$$\frac{\eta}{\xi} = p + q\xi^2\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2.$$

Соотвѣтственно этому, полагая въ формулѣ Лагранжа

$$\zeta = \frac{\eta}{\xi},\ a = p,\ f(\zeta) = q\zeta^2,\ \omega = \xi^2 \text{ и } F(\zeta) = \zeta^m,$$

находимъ

$$\eta^m = p^m\xi^m\Big\{1 + mpq\xi^2 + \frac{m(m+3)}{1.2}p^2q^2\xi^4 + \ldots \\ + \frac{m(m+k+1)(m+k+2)\ldots(m+2k-1)}{1.2.3\ldots k}p^kq^k\xi^{2k} + \ldots\Big\}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что коэффиціентъ при ξ^n въ разложеніи по степенямъ ξ выраженія

$$\frac{\eta^m}{1-\xi}$$

равенъ произведенію p^m на сумму

$$1 + mpq + \frac{m(m+3)}{1.2}p^2q^2 + \ldots + \frac{m(m+i+1)\ldots(m+2i-1)}{1.2.3\ldots i}p^iq^i,$$

гдѣ

$$i = \frac{n-m}{2} \text{ или } \frac{n-m-1}{2}.$$

Сопоставляя этотъ результатъ съ указаннымъ выше разложеніемъ $(1-\xi)\varphi_a(\xi)$ въ рядъ по степенямъ η, нетрудно уже

получить общую формулу для вычисленія искомой вѣроятности

при любыхъ значеніяхъ
$$y_{a,n}$$
$$a,\ b,\ n,\ p.$$

Остановимся на томъ случаѣ, когда каждая партія въ отдѣльности представляетъ игру безобидную, а капиталъ игрока L настолько великъ, что для разоренія L необходимо болѣе n партій. Тогда

$$p = q = \frac{1}{2}$$

и искомая нами вѣроятность разоренія игрока M, не позже какъ въ n партій, представится суммою

$$\frac{1}{2^a} + \frac{a}{2^{a+2}} + \frac{a(a+3)}{2^{a+4}.1.2} + \ldots\ldots + \frac{a(a+i+1)\ldots\ldots(a+2i-1)}{2^{a+2i}.1.2.3\ldots\ldots i},$$

гдѣ

$$i = \frac{n-a}{2} \text{ или } \frac{n-a-1}{2}.$$

Въ виду интереса, который представляетъ вопросъ о разореніи участниковъ безобидныхъ игръ, укажемъ еще приближенныя формулы для вычисленія той же вѣроятности разоренія M при большихъ значеніяхъ n, когда прямое вычисленіе суммы

$$\frac{1}{2^a} + \frac{a}{2^{a+2}} + \frac{a(a+3)}{2^{a+4}\,1.2} + \ldots\ldots + \frac{a(a+i+1)\ldots\ldots(a+2i-1)}{2^{a+2i}\,1.2\ldots\ldots i}$$

весьма затруднительно. Для приближеннаго вычисленія этой суммы, равной $y_{a,n}$, замѣтимъ, что безконечная сумма

$$\frac{1}{2^a} + \frac{a}{2^{a+2}} + \frac{a(a+3)}{2^{a+4}\,1.2} + \frac{a(a+4)(a+5)}{2^{a+6}\,1.2.3} + \ldots\ldots,$$

представляющая вѣроятность разоренія игрока M безъ ограниченія числа партій и капитала игрока L, равна единицѣ и что слѣдовательно

$$1 - y_{a,n} = \frac{a(a+i+2)\ldots\ldots(a+2i+1)}{2^{a+2i+2}\,1.2\ldots\ldots(i+1)} + \frac{a(a+i+3)\ldots\ldots(a+2i+3)}{2^{a+2i+4}\,1.2\ldots\ldots(i+2)} + \ldots\ldots$$

Общій членъ этой суммы

$$\frac{a(a+k+1)\ldots\ldots(a+2k-1)}{2^{a+2k}\,1.2\ldots k}$$

мы обозначимъ символомъ z_k. Обращаясь затѣмъ къ формулѣ Стирлинга и принимая во вниманіе равенство

$$z_k = \frac{a}{2^{a+2k}(a+2k)} \cdot \frac{1.2.3\dots(a+2k)}{1.2\dots k.1.2\dots(a+k)},$$

находимъ два выраженія

$$z'_k = a\sqrt{\frac{1}{2\pi k(a+k)(a+2k)}}\left(\frac{a+2k}{2a+2k}\right)^{a+k}\left(\frac{a+2k}{2k}\right)^k$$

и

$$z''_k = z'_k e^{\frac{1}{12(a+2k)} - \frac{1}{12k} - \frac{1}{12(a+k)}},$$

изъ которыхъ первое z'_k больше z_k, а второе z''_k меньше z_k.

Нетрудно также убѣдиться, что при $k > i$ оправдываются неравенства

$$\frac{1}{4} > \frac{k(a+k)(a+2k)}{(a+2k)^3} > \frac{i(a+i)(a+2i)}{(a+2i)^3},$$

$$\frac{1}{12(a+2k)} - \frac{1}{12k} - \frac{1}{12(a+k)} > \frac{1}{12(a+2i)} - \frac{1}{12i} - \frac{1}{12(a+i)},$$

$$\left(\frac{a+2k}{2k}\right)^k\left(\frac{a+2k}{2a+2k}\right)^{a+k} > \left(\frac{a+2i}{2i}\right)^i\left(\frac{a+2i}{2a+2i}\right)^{a+i}$$

и

$$\left(\frac{a+2k}{2k}\right)^k\left(\frac{a+2k}{2a+2k}\right)^{a+k} < e^{-\frac{a^2}{2(a+2k)}}.$$

Слѣдовательно, если положимъ

$$\overset{+}{z}_k = \frac{a+2i}{\sqrt{i(a+i)}}\,\frac{a}{\sqrt{2\pi(a+2k)^3}}\,e^{-\frac{a^2}{2(a+2k)}}$$

и

$$\overline{z}_k = H\frac{2a}{\sqrt{2\pi(a+2k)^3}}\left(\frac{a+2i}{2i}\right)^i\left(\frac{a+2i}{2a+2i}\right)^{a+i}$$

при

$$H = e^{\frac{1}{12(a+2i)} - \frac{1}{12i} - \frac{1}{12(a+i)}},$$

то всѣ слагаемыя суммы

$$z_{i+1} + z_{i+2} + \dots,$$

равной $1 - y_{a,n}$, удовлетворятъ неравенствамъ

$$\overset{+}{z}_k > z_k > \overline{z}_k$$

и потому

$$\overset{+}{z}_{i+1} + \overset{+}{z}_{i+2} + \ldots . > 1 - y_{a,n} > \overset{-}{z}_{i+1} + \overset{-}{z}_{i+2} + \ldots .$$

Съ другой стороны, имѣемъ

$$\frac{1}{\sqrt{(a+2i+2)^3}} + \frac{1}{\sqrt{(a+2i+4)^3}} + \ldots . > \frac{1}{\sqrt{a+2i}} - \frac{1}{2\sqrt{(a+2i)^3}}$$

и

$$\frac{e^{-\frac{a^2}{2(a+2i+2)}}}{\sqrt{(a+2i+2)^3}} + \frac{e^{-\frac{a^2}{2(a+2i+4)}}}{\sqrt{(a+2i+4)^3}} + \ldots . < \int_{i+\frac{a}{2}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{a^2}{4x}}dx}{(\sqrt{2x})^3},$$

по крайней мѣрѣ при достаточно большихъ значеніяхъ i, когда

$$a + 2i > \frac{a^2}{3}.$$

Наконецъ простая подстановка преобразуетъ интегралъ

$$\int_{i+\frac{a}{2}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{a^2}{4x}}dx}{(\sqrt{2x})^3}$$

въ

$$\frac{\sqrt{2}}{a}\int_0^{\tau} e^{-z^2}dz,$$

гдѣ

$$\tau = \frac{a}{2\sqrt{i+\frac{a}{2}}}.$$

Итакъ при

$$n \geqq \frac{a^2}{3} + 1$$

искомая нами вѣроятность разоренія игрока M, не позже какъ въ n партій, больше

$$1 - \frac{a+2i}{\sqrt{i(a+i)\pi}}\int_0^{\tau} e^{-z^2}dz$$

и меньше

$$1 - H\frac{2\tau}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{a+2i}{2i}\right)^i\left(\frac{a+2i}{2a+2i}\right)^{a+i}\left(1 - \frac{1}{2(a+2i)}\right),$$

гдѣ

$$i = \frac{n-a}{2} \quad \text{или} \quad \frac{n-a-1}{2}, \quad \tau = \frac{a}{2\sqrt{i+\frac{a}{2}}}$$

и

$$H = e^{\frac{1}{12(a+2i)} - \frac{1}{12i} - \frac{1}{12(a+i)}}.$$

Соотвѣтственно этому можемъ установить приближенную формулу

$$y_{a,n} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau e^{-z^2} dz,$$

гдѣ τ имѣетъ вышеуказанное значеніе.

Для примѣра положимъ

$$a = 100 \quad \text{и} \quad n = 200000.$$

Тогда

$$a + 2i = 200000, \; i = 99950, \; a + i = 100050,$$

$$\tau = \frac{100}{2\sqrt{100000}} = \sqrt{0,025} = 0,15811\ldots.$$

и

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau e^{-z^2} dz = 0,17693\ldots.,$$

вычитая же число $0,17693\ldots.$ изъ единицы, получимъ для вѣроятности разоренія игрока M такое приближенное значеніе

$$0,82306.$$

И достаточно уменьшить на одну единицу послѣднюю цифру найденной приближенной величины вѣроятности, чтобы имѣть число

$$0,82305,$$

меньшее этой вѣроятности; ибо въ данномъ случаѣ

$$\frac{a+2i}{2\sqrt{i(a+i)}} = \left\{1 - \frac{1}{4000000}\right\}^{-\frac{1}{2}} < 1,0000002.$$

Для опредѣленія другого предѣла той же вѣроятности, обра-

щаемся къ таблицамъ логарифмовъ*) и посредствомъ ихъ находимъ

$$\begin{array}{lr}
\operatorname{Log}(a+2i) = 5,3010299956 & \operatorname{Log}(2a+2i) = 5,3012470886 \\
\operatorname{Log} 2i \quad\quad = 5,3008127941 & \operatorname{Log}(a\ +2i) = 5,3010299956 \\
\hline
0,0002172015 & 0,0002170930 \\
\times 99950 & \times 100050 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
21,72015 & 21,70929 & 21,70930 \\
-0,01086 & -21,72015 & +0,01085 \\
\hline
21,70929 & \bar{1},98914 & 21,72015
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\operatorname{Log} 2\tau = \bar{1},5 & \operatorname{Log} H > \frac{-1}{10^6} \\
\frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{1}{\pi} = \bar{1},75142 & \operatorname{Log}\left(1-\frac{1}{2(a+2i)}\right) > \frac{-2}{10^6} \\
\bar{1},98914 & \\
\hline
\bar{1},24056 = \operatorname{Log} 0,17400 &
\end{array}$$

и наконецъ

$$y_{a,n} < 1 - 0,1739 = 0,8261.$$

Итакъ, если число партій ограничено 200000, то вѣроятность разоренія игрока M, капиталъ котораго составляетъ только сто ставокъ каждой партіи, не достигаетъ

$$0,83.$$

Если увеличимъ затѣмъ n въ сто разъ, то число τ уменьшится въ десять разъ и вмѣстѣ съ тѣмъ уменьшатся, приблизительно, въ десять разъ и найденные нами предѣлы разности $1 - y_{a,n}$; такъ что при

$$n = 20000000$$

вѣроятность разоренія того же игрока M будетъ довольно близка къ

$$1 - 0,017 = 0,983,$$

но меньше этого числа. Если же, увеличивая n въ сто разъ, мы

*) A. Steinhauser. Hilfstafeln zur präcisen Berechnung zwanzigstelliger Logarithmen.... Wien. 1880.

вмѣстѣ съ тѣмъ увеличимъ капиталъ M въ десять разъ, то τ останется безъ измѣненія и вѣроятность разоренія игрока M по прежнему будетъ меньше 0,83.

Замѣтимъ, что вѣроятность разоренія игрока M оставалась бы меньше $\frac{1}{2}$ при всякомъ числѣ партій, если бы окончательный расчетъ былъ отложенъ до того момента, пока не будетъ сыграно это число партій. Требованіе немедленной расплаты за каждую партію приближаетъ эту вѣроятность къ единицѣ, такъ что при достаточно большомъ числѣ партій разореніе игрока M становится весьма вѣроятнымъ.

Скажемъ еще нѣсколько словъ о тѣхъ случаяхъ, когда каждая партія въ отдѣльности представляетъ игру не безобидную, при чемъ различимъ два предположенія:

$$1)\ p > q \quad \text{и} \quad 2)\ p < q.$$

При $p > q$ отдѣльныя партіи невыгодны для M и къ прежнему заключенію можно добавить, что отсрочка окончательнаго расчета не устраняетъ большой вѣроятности разоренія M.

При $p < q$ отдѣльныя партіи выгодны для M и приведенныя выше формулы показываютъ, что вѣроятность разоренія игрока M всегда меньше $\left(\frac{p}{q}\right)^a$ и можетъ быть сдѣлана сколь угодно близкою къ $\left(\frac{p}{q}\right)^a$ посредствомъ увеличенія капитала L и числа допускаемыхъ партій n. И здѣсь слѣдуетъ помнить, что разсматриваемая нами величина вѣроятности разоренія игрока M обусловлена требованіемъ немедленной расплаты за каждую партію; такъ какъ, согласно выводамъ 2[й] и 3[й] главъ, вѣроятность разоренія M сдѣлалась бы сколь угодно малою, если бы было назначено напередъ достаточно большое число партій и окончательный расчетъ былъ отложенъ до тѣхъ поръ, пока не будетъ сыграно это число партій.

§ 25. *Задача 8[ая]*. Пусть

$$X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$$

будутъ n независимыхъ величинъ и пусть совокупность чиселъ

$$1,\ 2,\ 3, \ldots, m$$

представляетъ всѣ возможныя, и при томъ равновозможныя, значенія каждой изъ нихъ. Требуется найти вѣроятность, что сумма

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

будетъ равна данному числу.

Рѣшеніе. Полагая послѣдовательно

$$n = 1,\ 2,\ 3, \ldots,$$

приходимъ къ заключенію, что при любомъ значеніи n вѣроятность равенства

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \alpha,$$

гдѣ α число данное, можетъ быть опредѣлена какъ коэффиціентъ при t^α въ разложеніи выраженія

$$\left\{\frac{t + t^2 + \ldots + t^m}{m}\right\}^n$$

по степенямъ произвольнаго числа t. Съ другой стороны имѣемъ

$$\left(\frac{t + t^2 + \ldots + t^m}{m}\right)^n = \frac{t^n}{m^n}\,\frac{(1-t^m)^n}{(1-t)^n} =$$

$$= \frac{t^n}{m^n}\left[1 - nt^m + \frac{n(n-1)}{1.2}t^{2m} - \ldots\right]\left[1 + nt + \frac{n(n+1)}{1.2}t^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}t^3 + \ldots\right].$$

Поэтому, обозначивъ вѣроятность равенства

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \alpha$$

символомъ P_α, можемъ установить формулу

$$m^n P_\alpha = \frac{n(n+1)\ldots(\alpha-1)}{1.2\ldots(\alpha-n)} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n(n+1)\ldots(\alpha-m-1)}{1.2\ldots(\alpha-n-m)} +$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{n(n+1)\ldots(\alpha-2m-1)}{1.2\ldots(\alpha-n-2m)} - \ldots,$$

которая представляетъ удобное средство для вычисленія P_α при небольшихъ значеніяхъ α. Нетрудно также доказать равенство

$$P_\alpha = P_{n(m+1)-\alpha},$$

которое позволяетъ замѣнить число α разностью $n(m+1)-\alpha$ и такимъ образомъ даетъ возможность уменьшить α, если $\alpha > \frac{n(m+1)}{2}$. Напримѣръ, при $m=6$ и $n=3$ находимъ

$$216\,P_{18} = 216\,P_3 = 1,\quad 216\,P_{17} = 216\,P_4 = 3,$$

$$216\,P_{16} = 216\,P_5 = \frac{3.4}{1.2} = 6,\quad 216\,P_{15} = 216\,P_6 = \frac{3.4.5}{1.2.3} = 10,$$

$$216\,P_{14} = 216\,P_7 = \frac{3.4.5.6}{1.2.3.4} = 15,$$

$$216\,P_{13} = 216\,P_8 = \frac{3.4.5.6.7}{1.2.3.4.5} = 21$$

$$216\,P_{12} = 216\,P_9 = \frac{3.4.5.6.7.8}{1.2.3.4.5.6} - 3 = 25,$$

$$216\,P_{11} = 216\,P_{10} = \frac{3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5.6.7} - 3.3 = 27.$$

Для осуществленія этого примѣра могутъ служить три обыкновенныя шестигранныя кости, на граняхъ которыхъ стоятъ нумера 1, 2, 3, 4, 5, 6. Если такія три кости брошены на плоскость и если X_1, X_2, X_3 означаютъ нумера на верхнихъ ихъ граняхъ, то единственно возможными и притомъ равновозможными значеніями, какъ для X_1, такъ для X_2 и X_3, будутъ 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Соотвѣтственно этому найденныя нами числа

$$P_3,\ P_4,\ P_5, \ldots,\ P_{18}$$

представляютъ вѣроятности различныхъ предположеній о суммѣ нумеровъ, вскрывшихся на трехъ обыкновенныхъ игральныхъ костяхъ. И равенство

$$P_3 + P_4 + P_5 + \ldots + P_{10} = P_{11} + P_{12} + P_{13} + \ldots + P_{18}$$

указываетъ на одинаковую вѣроятность предположенія, что эта сумма не превосходитъ 10, и противоположнаго предположенія, что она больше десяти.

При большихъ значеніяхъ n точное вычисленіе P_α требуетъ утомительныхъ выкладокъ и едва ли можетъ представлять большой интересъ. Тогда возникаетъ вопросъ о разысканіи прибли-

женныхъ выраженій вѣроятности, по возможности простыхъ и близкихъ къ точному. Предполагая большимъ только n, а не m, и разсматривая не вѣроятности отдѣльныхъ значеній суммы

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

а вѣроятность, что эта сумма лежитъ въ данныхъ предѣлахъ, мы можемъ обратиться къ общимъ приближеннымъ вычисленіямъ 3ей главы. Для примѣненія ихъ слѣдуетъ найти математическія ожиданія первыхъ и вторыхъ степеней разсматриваемыхъ величинъ. Такъ какъ математическое ожиданіе любой изъ величинъ

$$X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$$

равно

$$\frac{1+2+\ldots+m}{m} = \frac{m+1}{2};$$

а математическое ожиданіе ея квадрата равно

$$\frac{1^2+2^2+\ldots+m^2}{m} = \frac{(m+1)(2m+1)}{6},$$

то разность между математическимъ ожиданіемъ квадрата этой величины и квадратомъ ея математическаго ожиданія приводится къ

$$\frac{(m+1)(2m+1)}{6} - \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 = \frac{m^2-1}{12}$$

и потому выводы третьей главы даютъ для вѣроятности неравенствъ

$$n\frac{m+1}{2} - \tau\sqrt{n\frac{m^2-1}{6}} < X_1 + X_2 + \ldots + X_n < n\frac{m+1}{2} + \tau\sqrt{n\frac{m^2-1}{6}}$$

приближенное выраженіе въ видѣ извѣстнаго интеграла

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau e^{-z^2}dz.$$

Воспользуемся частнымъ примѣромъ для указанія другого вывода того же приближеннаго выраженія вѣроятности, который можно примѣнить и въ общемъ случаѣ. И прежде всего замѣтимъ, что въ разложеніи любой цѣлой функціи $F(t)$ по степенямъ t коэффиціентъ при t^α можетъ быть представленъ въ видѣ

интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F\left(e^{\varphi\sqrt{-1}}\right) e^{-\alpha\varphi\sqrt{-1}}\, d\varphi;$$

ибо

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi = 2\pi$$

и для любого цѣлаго числа k, отличнаго отъ нуля, имѣемъ

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{k\varphi\sqrt{-1}}\, d\varphi = 0.$$

Поэтому

$$P_\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{(n-\alpha)\varphi\sqrt{-1}}\left(1-e^{m\varphi\sqrt{-1}}\right)^n}{m^n\left(1-e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)^n}\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{\left(n\frac{m+1}{2}-\alpha\right)\varphi\sqrt{-1}}\left(e^{\frac{m}{2}\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\frac{m}{2}\varphi\sqrt{-1}}\right)^n}{m^n\left(e^{\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}}\right)^n}\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{\left(n\frac{m+1}{2}-\alpha\right)\varphi\sqrt{-1}}\left(\frac{\operatorname{Sin}\frac{m}{2}\varphi}{m\operatorname{Sin}\frac{\varphi}{2}}\right)^n d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \operatorname{Cos}\left(n\frac{m+1}{2}-\alpha\right)\varphi\left(\frac{\operatorname{Sin}\frac{m}{2}\varphi}{m\operatorname{Sin}\frac{\varphi}{2}}\right)^n d\varphi.$$

Обращаясь къ приближеннымъ вычисленіямъ и положивъ

$$n\frac{m+1}{2} - \alpha = \beta = \gamma\sqrt{n\frac{m^2-1}{6}},$$

замѣнимъ

$$\left(\frac{\operatorname{Sin}\frac{m}{2}\varphi}{m\operatorname{Sin}\frac{\varphi}{2}}\right)^n$$

показательною функціею

$$e^{-n\frac{m^2-1}{24}\varphi^2}$$

на основаніи соображеній, указанныхъ въ 3ей главѣ, а за верхній предѣлъ интеграла возьмемъ ∞ вмѣсто π.

Мы получимъ такимъ образомъ приближенную формулу

$$P_{n\frac{m+1}{2}-\beta} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{Cos}\beta\varphi . e^{-n\frac{m^2-1}{24}\varphi^2} d\varphi,$$

правая часть которой, какъ извѣстно, равна

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{6}{n(m^2-1)}}\, e^{-\frac{6\beta^2}{n(m^2-1)}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{6}{n(m^2-1)}}\, e^{-\gamma^2}.$$

Согласно этому вѣроятность неравенствъ

$$n\frac{m+1}{2} - \tau\sqrt{n\frac{m^2-1}{6}} < X_1 + X_2 + \ldots + X_n < n\frac{m+1}{2} + \tau\sqrt{n\frac{m^2-1}{6}}$$

приближенно представится суммою всѣхъ произведеній

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{6}{n(m^2-1)}}\, e^{-\gamma^2},$$

для которыхъ γ удовлетворяетъ неравенствамъ

$$-\tau < \gamma < +\tau$$

и обращаетъ выраженіе

$$n\frac{m+1}{2} - \gamma\sqrt{n\frac{m^2-1}{6}}$$

въ цѣлое число.

Всѣ члены указанной суммы содержатъ множитель

$$\sqrt{\frac{6}{n(m^2-1)}},$$

который равенъ разности каждыхъ двухъ смежныхъ значеній γ и будетъ сколь угодно малъ при достаточно большихъ n.

Замѣнивъ на этомъ основаніи сумму интеграломъ, получаемъ для вѣроятности неравенствъ

$$n\frac{m+1}{2} - \tau\sqrt{n\frac{m^2-1}{6}} < X_1 + X_2 + \ldots + X_n < n\frac{m+1}{2} + \tau\sqrt{n\frac{m^2-1}{6}}$$

прежнее приближенное выраженіе

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau e^{-\gamma^2} d\gamma.$$

§ 26. Вернемся къ важному вопросу о повтореніи независимыхъ испытаній, которымъ мы занимались во второй главѣ.

Обозначивъ число испытаній буквою n и предположивъ, что при каждомъ изъ нихъ вѣроятность событія E равна p, мы нашли, что вѣроятность появленія событія E ровно m разъ при этихъ n испытаніяхъ выражается произведеніемъ

$$\frac{1\ 2.3\ldots n}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)}p^m q^{n-m},$$

гдѣ

$$q=1-p.$$

Поэтому вѣроятность, что событіе E появится при разсматриваемыхъ n испытаніяхъ болѣе l разъ, представится суммою

$$\frac{1.2\ldots\, np^{l+1}\, q^{n-l-1}}{1.2\ldots(l+1)\,1.2\ldots\,(n-l-1)}+\frac{1.2\ldots np^{l+2}\, q^{n-l-2}}{1.2\ldots(l+2)\,1.2\ldots\,(n-l-2)}+\ldots,$$

которая приводится къ произведенію выраженія

$$P=\frac{1.2\ldots\, n}{1.2\ldots(l+1)\,1.2\ldots(n-l-1)}p^{l+1}\, q^{n-l-1}$$

на сумму

$$S=1+\frac{n-l-1}{l+2}\,\frac{p}{q}+\frac{(n-l-1)(n-l-2)}{(l+2)(l+3)}\left(\frac{p}{q}\right)^2+\ldots$$

Для приближеннаго вычисленія P при большихъ значеніяхъ n, $l+1$ и $n-l-1$ можетъ служить формула Стирлинга, доставляющая рядъ неравенствъ, изъ которыхъ мы укажемъ здѣсь только два простѣйшихъ

$$P<P_1=\sqrt{\frac{n}{2\pi(l+1)(n-l-1)}}\left(\frac{np}{l+1}\right)^{l+1}\left(\frac{nq}{n-l-1}\right)^{n-l-1}$$

и

$$\frac{P}{P_1}>H=e^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{12(l+1)}-\frac{1}{12(n-l-1)}}.$$

Обращаясь къ суммѣ S, мы покажемъ теперь, что для ея вычисленія можно съ успѣхомъ воспользоваться разложеніемъ въ непрерывную дробь, которое вытекаетъ какъ частный случай изъ формулы Гаусса

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{ax}{1-\cfrac{bx}{1-\cfrac{cx}{1-\cfrac{dx}{1-\ldots}}}}},$$

гдѣ $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ и $F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)$ означаютъ *гипергеометрическіе* ряды

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots.$$

и

$$1+\frac{\alpha(\beta+1)}{1.(\gamma+1)}x+\frac{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)(\beta+2)}{1.2(\gamma+1)(\gamma+2)}x^2+\ldots.,$$

коэффиціенты же

$$a, b, c, d, \ldots.$$

опредѣляются равенствами

$$a=\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}, \quad b=\frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)},$$

$$c=\frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}, \quad d=\frac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)},$$

. . . .

Относительно вывода формулы Гаусса замѣтимъ, что она вытекаетъ изъ слѣдующихъ простыхъ связей между различными гипергеометрическими рядами:

$$F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)-F(\alpha,\beta,\gamma,x)=axF(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x),$$

$$F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x)-F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)$$
$$=bxF(\alpha+1,\beta+2,\gamma+3,x),$$

$$F(\alpha+1,\beta+2,\gamma+3,x)-F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x)$$
$$=cxF(\alpha+2,\beta+2,\gamma+4,x),$$

. . . .

Для примѣненія формулы Гаусса къ разложенію S въ непрерывную дробь слѣдуетъ положить

$$\alpha=-n+l+1, \ \beta=0, \ \gamma=l+1, \ x=-\frac{p}{q},$$

что даетъ намъ такое равенство

$$S = \cfrac{1}{1 - \cfrac{c_1}{1 + \cfrac{d_1}{1 - \cfrac{c_2}{1 + \cfrac{d_2}{1 - \ddots}}}}},$$

гдѣ вообще

$$c_k = \frac{(n-k-l)(l+k)p}{(l+2k-1)(l+2k)q}, \quad d_k = \frac{k(n+k)p}{(l+2k)(l+2k+1)q}.$$

Мы имѣемъ здѣсь не безконечную, а конечную непрерывную дробь, послѣднимъ звеномъ которой будетъ

$$\frac{d_{n-l-1}}{1},$$

такъ какъ $c_{n-l} = 0$. Нетрудно также убѣдиться, что каждое изъ чиселъ c_k меньше единицы, если только

$$\frac{n-l-1}{l+2}\frac{p}{q} < 1,$$

какъ мы и будемъ предполагать въ дальнѣйшихъ разсужденiяхъ. Поэтому, обозначивъ для краткости непрерывную дробь

$$\cfrac{c_k}{1 + \cfrac{d_k}{1 - \cfrac{c_{k+1}}{1 + \ddots}}}$$

символомъ ω_k, имѣемъ

$$0 < \omega_k < c_k$$

и затѣмъ можемъ установить рядъ неравенствъ

$$S = \frac{1}{1-\omega_1} < \frac{1}{1-c_1}, \quad S > \cfrac{1}{1 - \cfrac{c_1}{1 + \cfrac{d_1}{1 - c_2}}}$$

$$S < \cfrac{1}{1 - \cfrac{c_1}{1 + \cfrac{d_1}{1 - \cfrac{c_2}{1 + \cfrac{d_2}{1 - c_3}}}}}$$

. . . .

Остается сопоставить послѣднія неравенства съ тѣми, которымъ удовлетворяетъ P и которыя были указаны выше; и мы будемъ имѣть возможность образовать рядъ приближенныхъ значеній вѣроятности появленія событія E, въ разсматриваемыя n испытаній, болѣе l разъ, при чемъ о каждомъ изъ этихъ приближенныхъ значеній будемъ знать, превосходитъ ли оно вѣроятность или, напротивъ, меньше ея.

На основаніи тѣхъ же неравенствъ, переставивъ p съ q и замѣнивъ l на $n-l'$, найдемъ рядъ приближенныхъ значеній вѣроятности появленія событія E, въ разсматриваемыя n испытаній, менѣе l' разъ, при чемъ о каждомъ изъ полученныхъ нами приближенныхъ значеній этой новой вѣроятности также будемъ знать, превосходитъ ли оно вѣроятность или меньше ея.

А по приближеннымъ величинамъ вѣроятности появленія событія E болѣе l разъ и вѣроятности появленія событія E менѣе l' разъ нетрудно, при $l > l'$, получить и приближенную величину вѣроятности появленія событія E не болѣе l разъ и не менѣе l' разъ, такъ какъ сумма всѣхъ этихъ трехъ вѣроятностей должна составлять единицу.

Для примѣра положимъ (см. § 15)

$$p=\frac{3}{5},\quad q=\frac{2}{5},\quad n=6520$$

и будемъ искать вѣроятность, что отношеніе числа появленій событія E къ числу испытаній будетъ отличаться отъ $\frac{3}{5}$ менѣе чѣмъ на $\frac{1}{50}$. Иначе сказать, будемъ искать вѣроятность, что событіе E появится не болѣе 4042 разъ, а противоположное ему событіе не болѣе 2738 разъ.

Согласно только что сдѣланному замѣчанію, вычисленіе искомой вѣроятности сводится къ вычисленію вѣроятности, что событіе E появится болѣе 4042, и вѣроятности, что противоположное событіе появится болѣе 2738 разъ.

Обращаясь къ вѣроятности, что событіе E появится болѣе 4042 разъ, мы должны положить, въ вышеуказанныхъ форму-

лахъ и неравенствахъ

$$p=\frac{3}{5},\quad q=\frac{2}{5},\quad n=6520,\quad l=4042.$$

Тогда

$$P_1=\sqrt{\frac{3260}{\pi.4043.2477}\left(\frac{3912}{4043}\right)^{4043}\left(\frac{2608}{2477}\right)^{2477}},$$

$$H=e^{\frac{1}{12.6520}-\frac{1}{12.4043}-\frac{1}{12.2477}}$$

и посредствомъ логарифмическихъ таблицъ находимъ

Log 4043 ╪ 3,6067037413	Log 2608 ╪ 3,4163075871
Log 3912 ╪ 3,5923988461	Log 2477 ╪ 3,3939260066
143048952	0,0223815805
× 4043	× 2477
57,2195808	44,7631610
5721958	8,9526322
429147	1,5667106
	1566711
57,8346913	55,4391749
—55,4391749	
2,3955164	

$\frac{1}{2}$ Log 4043 ╪ 1,8033519	$\frac{1}{2}$ Log 3260 ╪ 1,7566088
$\frac{1}{2}$ Log 2477 ╪ 1,6969630	—6,1444062
$\frac{1}{2}$ Log π ╪ 0,2485749	5,6122026—10
	Log $N>-0{,}00002$
6,1444062	$0{,}00004094<P<0{,}00004095.$

Съ другой стороны имѣемъ

$$c_1=\frac{2477}{4044}\cdot\frac{3}{2}=\frac{7431}{8088},\quad d_1=\frac{6521}{4044.4045}\cdot\frac{3}{2}=\frac{19563}{32715960},$$

$$c_2=\frac{2476.4044}{4045.4046}\cdot\frac{3}{2}=\frac{7509708}{8183035},\quad d_2=\frac{6522.3}{4046.4047}=\frac{3261}{2729027},$$

$$c_3=\frac{2475.4045}{4047.4048}\cdot\frac{3}{2}=\left(1-\frac{2}{4047}\right)\frac{7425}{8096}$$

и, производя простыя выкладки, послѣдовательно получаемъ

$$c_3 < 0,9167,\ \frac{d_2}{1-\omega_3} < \frac{3261}{0,0833 \times 2729027} < 0,01435,$$

$$0,918 > c_2 > \omega_2 > \frac{c_2}{1,01435} > 0,9047,$$

$$0,0074 > \frac{d_1}{0,082} > \frac{d_1}{1-\omega_2} > \frac{d_1}{0,0953} > 0,00626,$$

$$0,912 < \frac{c_1}{1,0074} < \omega_1 < \frac{c_1}{1,00626} < 0,9131$$

$$11,36 < \frac{1}{0,088} < S < \frac{1}{0,0869} < 11,508;$$

слѣдовательно

$$SP < \frac{0,4095}{869} < 0,0004713, \text{ но } SP > \frac{0,4094}{880} > 0,000465.$$

Переходя къ вѣроятности, что событіе противоположное E появится болѣе 2738 разъ, мы должны положить

$$p = \frac{2}{5},\ q = \frac{3}{5},\ n = 6520,\ l = 2738.$$

При такихъ значеніяхъ p, q, n, l получаемъ

$$P_1 = \sqrt{\frac{3260}{\pi . 2739 . 3781}} \left(\frac{2608}{2739}\right)^{2739} \left(\frac{3912}{3781}\right)^{3781},$$

$$H = e^{\frac{1}{12.6520} - \frac{1}{12.2739} - \frac{1}{12.3781}}$$

и посредствомъ логарифмическихъ таблицъ находимъ

Log 2739 ∓ 3,4375920323	Log 3912 ∓ 3,5923988461
Log 2608 ∓ 3,4163075871	Log 3781 ∓ 3,5776066774
212844452.	147921687
× 2739	× 3781
42,5688904	44,3765061
14,8991116	10,3545181
6385334	1,1833735
1915600	147922
58,2980954	55,9291899
—55,9291899	
2,3689055	

11*

$$
\begin{array}{lr}
 & 2,3689055 \\
\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,2739 & +1,7187960 \\
\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,3781 & +1,7888033 \\
\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\pi & +0,2485749 \\
\hline
 & 6,1250797
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,3260 & +1,7566088 \\
 & -6,1250797 \\
\hline
 & 5,6315291-10 \\
\mathrm{Log}\,H > -0,00002 & \\
\end{array}
$$

$$0,00004280 < P < 0,00004281.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$c_1 = \frac{3781}{2740} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3781}{4110}, \quad d_1 = \frac{6521}{2740.2741} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6521}{11265510},$$

$$c_2 = \frac{3780.2740}{2741.2742} \cdot \frac{2}{3} = \frac{420}{457} \cdot \frac{2740}{2741}, \quad d_2 = \frac{2.6522}{2742.2743} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4348}{3760653},$$

$$c_3 = \frac{3779.2741}{2743.2744} \cdot \frac{2}{3} = \left(1 - \frac{2}{2743}\right) \frac{7558}{8232},$$

откуда послѣдовательно выводимъ неравенства

$$c_3 < 0,9175, \quad \frac{d_2}{1-\omega_2} < \frac{4348}{0,0825 \times 3760653} < 0,01402,$$

$$0,919 > c_2 > \omega_2 > \frac{c_2}{1,01402} > 0,9059,$$

$$0,0072 > \frac{d_1}{0,081} > \frac{d_1}{1-\omega_2} > \frac{d_1}{0,0941} > 0,00615,$$

$$0,913 < \frac{c_1}{1,0072} < \omega_1 < \frac{c_1}{1,00615} < 0,9144,$$

$$11,49 < \frac{1}{0,087} < S < \frac{1}{0,0856} < 11,69;$$

слѣдовательно

$$SP < \frac{0,4281}{856} < 0,0005002,$$

но

$$SP > \frac{0,428}{870} > 0,000491.$$

Итакъ вѣроятность, что въ разсматриваемыя нами 6520 испытаній событіе E появится болѣе 4042 разъ, заключается между

$$0,0004713 \quad \text{и} \quad 0,000465,$$

а вѣроятность, что въ тѣже испытанія событіе E появится ме-

нѣе 3782 разъ, заключается между

$$0{,}0005002 \quad \text{и} \quad 0{,}000491.$$

И потому вѣроятность, что событіе E появится въ эти испытанія не менѣе 3782 разъ и не болѣе 4042 разъ, лежитъ между

$$1 - 0{,}000972 = 0{,}999028$$

и

$$1 - 0{,}000956 = 0{,}999044.$$

§ 27. Въ заключеніе главы остановимся на одномъ обобщеніи задачи о разореніи игроковъ (задача № 6), которымъ занимались Ж. Бертранъ и Е. Руше.

Выводы этихъ ученыхъ нельзя признать совершенно правильными, такъ какъ они разсматривали трехчленное уравненіе высшаго порядка, какъ уравненіе второго порядка.

На возможность нѣкоторой неточности ихъ выводовъ указалъ и самъ Бертранъ въ § 91 своей книгѣ «Calcul des probabilités», но не выяснилъ во всей полнотѣ сущности этой неточности.

Интересно замѣтить, что въ данномъ случаѣ допущеніе нѣкоторой неправильности при рѣшеніи уравненія оказалось полезнымъ, такъ какъ оно дало возможность весьма просто придти къ приближеннымъ формуламъ, которыя тѣмъ ближе къ истиннымъ, чѣмъ меньше ставки игроковъ по сравненію съ ихъ капиталами; точное же рѣшеніе задачъ Бертрана и Руше сложно и едва ли можетъ представлять большой интересъ.

Мы дополнимъ выводы Бертрана и Руше доказательствомъ нѣкоторыхъ неравенствъ.

Измѣненіе, внесенное Бертраномъ и Руше въ извѣстную задачу о разореніи игроковъ, состоитъ въ томъ, что ставки игроковъ они не предполагаютъ одинаковыми для обоихъ игроковъ.

Внося такое измѣненіе въ задачу № 6, положимъ, что игрокъ L за каждую выигранную партію получаетъ α единицъ капитала отъ M, а за каждую проигранную партію отдаетъ ему β единицъ. Числа α и β мы будемъ считать цѣлыми, подобно числамъ a и b, предполагая единицу капитала достаточно малою.

Чтобы измѣненная задача была вполнѣ опредѣленною, необходимо точно установить, когда тотъ или другой изъ игроковъ будетъ признанъ разорившимся; другими словами, мы должны установить, при какихъ условіяхъ оканчивается игра.

Въ задачѣ № 6, которою мы занимались въ § 24, разореніе игрока выражается приведеніемъ его капитала къ нулю и игра продолжается безпрепятственно, пока капиталы обоихъ игроковъ отличны отъ нуля. Въ измѣненной же задачѣ препятствіемъ къ продолженію игры можетъ служить не обращеніе капитала одного изъ игроковъ въ нуль, а невозможность, для одного изъ нихъ, уплатить полностью послѣдній проигрышъ или невозможность поставить полную ставку.

Мы остановимся на предположеніи, что игра прекращается, какъ только одинъ изъ игроковъ не можетъ поставить полной ставки предстоящей партіи, и соотвѣтственно этому будемъ считать игрока L выигравшимъ игру, а игрока M разорившимся, какъ только капиталъ послѣдняго сдѣлается меньше α; если же капиталъ игрока L станетъ меньше β, то по нашимъ условіямъ L долженъ быть признанъ проигравшимъ игру и разорившимся.

Внеся указанное измѣненіе въ задачу № 6 и сохраняя прежнія обозначенія, мы тѣмъ же путемъ, который раньше привелъ къ уравненію второго порядка

$$y_x = py_{x+1} + qy_{x-1},$$

приходимъ къ линейному уравненію

$$y_x = py_{x+\alpha} + qy_{x-\beta}$$

порядка $\alpha + \beta$.

Общее рѣшеніе этого новаго линейнаго уравненія связано съ рѣшеніемъ алгебраическаго уравненія

$$p\xi^{\alpha+\beta} - \xi^{\beta} + q = 0$$

и заключаетъ $\alpha + \beta$ произвольныхъ постоянныхъ.

Изъ общаго рѣшенія мы получимъ искомое выраженіе y_x, давая этимъ постояннымъ такія значенія, при которыхъ выпол-

няются условія

$$y_{a+b} = y_{a+b-1} = \ldots = y_{a+b-\alpha+1} = 1$$
$$y_0 = y_1 = \ldots = y_{\beta-1} = 0,$$

при чемъ условія первой строки указываютъ на разореніе игрока M, когда его капиталъ меньше α, а условія второй строки указываютъ на разореніе L, когда капиталъ послѣдняго меньше β.

Наша цѣль состоитъ, какъ было уже намѣчено, въ указаніи двухъ предѣловъ, между которыми должно заключаться y_b и которые при большихъ значеніяхъ a и b, сравнительно съ α и β, немного разнятся другъ отъ друга.

Для этой цѣли установимъ относительно нашего уравненія

$$y_x = p y_{x+\alpha} + q y_{x-\beta},$$

что удовлетворяющее ему выраженіе y_x при разсматриваемыхъ нами значеніяхъ x, т. е. при

$$x = 0,\ 1,\ 2, \ldots, a+b,$$

не можетъ быть отрицательнымъ числомъ, если среди $\alpha+\beta$ чиселъ

$$y_0,\ y_1, \ldots,\ y_{\beta-1},\ y_{a+b},\ y_{a+b-1}, \ldots,\ y_{a+b-\alpha+1}$$

нѣтъ отрицательныхъ; при чемъ воспользуемся свойствомъ вѣроятности оставаться всегда числомъ положительнымъ.

Прежде всего остановимся на тѣхъ $\alpha+\beta$ рѣшеніяхъ разсматриваемаго нами линейнаго уравненія, для которыхъ одно изъ чиселъ

$$y_0,\ y_1, \ldots,\ y_{\beta-1},\ y_{a+b},\ y_{a+b-1}, \ldots,\ y_{a+b-\alpha+1}$$

равно единицѣ, а остальныя — нулю.

Эти $\alpha+\beta$ рѣшеній даютъ $\alpha+\beta$ вѣроятностей, что капиталъ игрока L изъ величины x превратится, при окончаніи игры, въ одно опредѣленное число совокупности $\alpha+\beta$ чиселъ

$$0,\ 1,\ 2, \ldots,\ \beta-1,\ a+b,\ a+b-1, \ldots,\ a+b-\alpha+1,$$

и потому они не могутъ давать для y_x отрицательныхъ значеній,

ни при одномъ изъ разсматриваемыхъ нами значеній x, ибо вѣроятность можетъ быть только числомъ положительнымъ или нулемъ. Обращаясь къ другимъ рѣшеніямъ уравненія

$$y_x = p y_{x+\alpha} + q y_{x-\beta},$$

замѣчаемъ, что любое изъ нихъ можно составить линейнымъ образомъ изъ упомянутыхъ сейчасъ $\alpha + \beta$ рѣшеній, и на этомъ основаніи легко убѣждаемся въ правильности высказаннаго нами положенія, что при

$$x = 0, 1, 2, \ldots, a + b$$

должно быть

$$y_x \geqq 0,$$

если такое неравенство имѣетъ мѣсто при

$$x = 0, 1, 2, \ldots, \beta - 1, a + b, a + b - 1, \ldots, a + b - \alpha + 1.$$

Отсюда затѣмъ слѣдуетъ, что два рѣшенія

$$y'_x, \quad y''_x$$

нашего линейнаго уравненія навѣрно удовлетворяютъ неравенству

$$y'_x \geqq y''_x$$

при всѣхъ разсматриваемыхъ нами значеніяхъ x, если такое неравенство оправдывается при

$$x = 0, 1, 2, \ldots, \beta - 1, a + b, a + b - 1, \ldots, a + b - \alpha + 1.$$

Установивъ это, назовемъ буквою ξ вещественный положительный корень уравненія

$$\frac{p\xi^{\alpha+\beta} - \xi^{\beta} + q}{\xi - 1} = 0.$$

Если ξ не $= 1$, наше уравненіе

$$y_x = p y_{x+\alpha} + q y_{x-\beta}$$

допускаетъ рѣшеніе

$$y_x = C_1 + C_2 \xi^x,$$

содержащее два произвольныхъ постоянныхъ числа C_1 и C_2, распоряжаясь которыми, мы можемъ удовлетворить двумъ урав-

неніямъ. И въ силу указаннаго нами неравенства можно утверждать, что выраженіе

$$C_1 + C_2 \xi^x$$

будетъ больше искомой вѣроятности y_x, если числа C_1 и C_2 мы опредѣлимъ уравненіями

$$C_1 + C_2 \xi^{a+b-\alpha+1} = 1 \text{ и } C_1 + C_2 = 0,$$

при соблюденіи которыхъ имѣемъ

$$C_1 + C_2 \xi^x > 1 \text{ при } x = a+b,\ a+b-1, \ldots, a+b-\alpha+2$$

и

$$C_1 + C_2 \xi^x > 0 \text{ при } x = 1,\ 2, \ldots, \beta - 1.$$

Наоборотъ наше, выраженіе

$$C_1 + C_2 \xi^x$$

будетъ меньше искомой вѣроятности y_x, если числа C_1 и C_2 мы опредѣлимъ уравненіями

$$C_1 + C_2 \xi^{a+b} = 1 \text{ и } C_1 + C_2 \xi^{\beta-1} = 0,$$

при соблюденіи которыхъ имѣемъ

$$C_1 + C_2 \xi^x < 1 \text{ при } x = a+b-1,\ a+b-2, \ldots, a+b-\alpha+1$$

и

$$C_1 + C_2 \xi^x < 0 \text{ при } x = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \beta-2.$$

Такимъ образомъ приходимъ къ неравенствамъ

$$\frac{\xi^x - 1}{\xi^{a+b-\alpha+1} - 1} > y_x > \frac{\xi^{x-\beta+1} - 1}{\xi^{a+b-\beta+1} - 1}$$

и затѣмъ

$$\frac{\xi^b - 1}{\xi^{a+b-\alpha+1} - 1} > y_b < \frac{\xi^{b-\beta+1} - 1}{\xi^{a+b-\beta+1} - 1}.$$

Бертранъ, оставляя безъ вниманія всѣ отрицательные и мнимые корни уравненія

$$p\xi^{\alpha+\beta} - \xi^\beta + q = 0,$$

беретъ вышеприведенное частное рѣшеніе, съ двумя произвольными постоянными, вмѣсто общаго, которое должно содержать

$\alpha + \beta$ произвольныхъ постоянныхъ, и соотвѣтственно этому допускаетъ, что искомая вѣроятность y_x опредѣляется формулой

$$y_x = C_1 + C_2 \xi^x,$$

коэффиціенты которой C_1 и C_2 находятся изъ уравненій

$$y_{a+b} = C_1 + C_2 \xi^{b+a} = 1,\ y_0 = C_1 + C_2 = 0.$$

Такимъ образомъ онъ получаетъ для y_b приближенную величину

$$\frac{\xi^b - 1}{\xi^{a+b} - 1},$$

которая лежитъ въ указанныхъ нами границахъ

$$\frac{\xi^b - 1}{\xi^{a+b-\alpha+1} - 1} \text{ и } \frac{\xi^{b-\beta+1} - 1}{\xi^{a+b-\beta+1} - 1}$$

и потому при большихъ значеніяхъ a и b, по сравненію съ α и β, немного отклоняется отъ точной величины y_b.

При $\xi = 1$ наше уравненіе

$$y_x = py_{x+\alpha} + qy_{x-\beta}$$

допускаетъ рѣшеніе

$$y_x = C' + C'' x,$$

сравнивая которое, при различныхъ значеніяхъ C' и C'', съ искомою вѣроятностью y_x, мы можемъ, пользуясь прежними соображеніями, установить для искомой вѣроятности y_b неравенства

$$\frac{b}{a+b-\alpha+1} > y_b > \frac{b-\beta+1}{a+b-\beta+1},$$

которыя можно вывесть также изъ ранѣе установленныхъ посредствомъ приближенія ξ къ предѣлу 1; для этого случая Бертранъ получаетъ такое приближенное равенство

$$y_b = \frac{b}{a+b}.$$

Кромѣ вѣроятности разоренія игроковъ, Бертранъ и Руше занимались математическимъ ожиданіемъ числа партій, приводящихъ къ разоренію. Необходимыя дополненія ихъ нестрогихъ выводовъ можно найти въ моей замѣткѣ «Къ вопросу о разореніи игроковъ» (Изв. физ.-мат. общ. при Каз. унив. 1903 г.).

Литература.

Fermat. Oeuvres complètes publiées par Tannery et Henry. T. II. Pascal. Oeuvres. T. IV, V (изданіе 1779 года).

Huygens. De Ratiociniis in Ludo Aleae (Schooten. Exercitationes Mathematicae) 1657.

Montmort. Essay d'analyse sur les jeux de hazard. 2 éd. 1713.

Moivre. The doctrine of chance. 1718.

Bernoulli, Daniel. Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis (Comm. Ac. Petrop. V, 1738).

Euler. Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre. (Hist. de l'Acad. r. des sc. et bel. let. Berlin T. VII, 1751).

Euler. Solutio quarundam quaestionum difficiliorum in calculo probabilium (Opuscula analytica II).

Lagrange. Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le calcul des probabilités, et où l'on résout différents problèmes relatifs à cette matière (Oeuvres de Lagrange. T. II).

Lagrange. Recherches sur les suites récurrentes dont les termes varient de plusieurs manières différentes, ou sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies et partielles; et sur l'usage de ces équations dans la théorie des hasards. (Oeuvres T. IV).

В. П. Ермаковъ. Теорія вѣроятностей. 1879.

Eggenberger. Beiträge zur Darstellung des Bernoulli'schen Theorems, der Gammafunction und des Laplace'schen Integrals, 2 Aufl. Jena. 1906.

А. Марковъ. Объ испытаніяхъ связанныхъ въ цѣпь ненаблюдаемыми событіями (Изв. Акад. Наукъ 1912).

Broden. Wahrscheinlichkeitsbestimmungen bei der gewöhnlichen Kettenbruchentwickelung reeller Zahlen (Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akad. Förhandlingar 57, 239—266).

A. Wiman. Ueber eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe bei Kettenbruchentwickelungen (Тамъ-же 829—841).

ГЛАВА V.

Предѣлы, ирраціональныя числа и непрерывныя величины въ исчисленіи вѣроятностей.

§ 28. Не устанавливая одного общаго опредѣленія, мы будемъ называть нѣкоторыя событія *предѣльными* для другихъ событій, подобно тому какъ касательная называется предѣльнымъ положеніемъ сѣкущей. Называя, на какихъ либо основаніяхъ, событіе E предѣльнымъ для ряда событій

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots,$$

вѣроятности которыхъ образуютъ рядъ чиселъ

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots,$$

мы вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣлимъ вѣроятность событія E какъ предѣлъ, къ которому стремится p_n при безпредѣльномъ возрастаніи значка n.

Примѣры предѣльныхъ событій можно найти въ 6[ой] и 7[ой] задачѣ предыдущей главы. Но мы не станемъ возвращаться къ разобраннымъ уже вопросамъ, а займемся новыми.

Прежде чѣмъ перейти къ частнымъ вопросамъ, замѣтимъ, что при всѣхъ обобщеніяхъ понятія о вѣроятности какъ о числѣ мы имѣемъ въ виду сохраненіе теоремъ сложенія и умноженія вѣроятностей.

Первый интересный примѣръ предѣльныхъ событій, на которомъ мы остановимся, доставитъ намъ задача Чебышева; та-

кое названіе мы придаемъ слѣдующей задачѣ*), заимствованной изъ лекцій Чебышева:

Опредѣлить вѣроятность несократимости раціональной дроби, числитель и знаменатель которой написаны наудачу.

Эта замѣчательная задача, подобно многимъ другимъ, станетъ опредѣленною и получитъ опредѣленное рѣшеніе только послѣ ряда условій, выясняющихъ смыслъ указанія, что числитель и знаменатель дроби написаны наудачу.

Приступая къ изслѣдованію поставленнаго вопроса, займемся сначала болѣе простымъ вопросомъ о сократимости и несократимости дроби на данное число a.

Относительно числителя дроби мы можемъ различить a случаевъ по величинѣ остатка отъ обыкновеннаго дѣленія его на a; именно возможными величинами остатка будутъ

$$0,\ 1,\ 2, \ldots,\ a-1.$$

И въ силу указанія, что числитель написанъ наудачу, мы будемъ считать всѣ эти a случаевъ равновозможными.

Такъ какъ числитель дѣлится на a только въ одномъ изъ установленныхъ нами случаевъ, то вѣроятность дѣлимости его на a выразится дробью $\frac{1}{a}$. На подобныхъ же основаніяхъ вѣроятность дѣлимости знаменателя дроби на a будетъ также равна $\frac{1}{a}$. Слѣдовательно вѣроятность, что дробь можно сократить на a выразится произведеніемъ

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2}$$

и потому вѣроятность, что сокращеніе дроби на a невозможно, представится разностью

$$1 - \frac{1}{a^2}.$$

Далѣе важно установить, что вѣроятность несократимости

---

*) Рѣшеніе этой задачи можно найти также въ «Vorlesungen über Mathematik von Leopold Kronecker» (Zweiter Teil, erster Abschnitt, erster Band, 24 Vorl.), гдѣ упомянуто, что ту же задачу разсматривалъ Дирихле.

дроби на a сохраняетъ величину

$$1 - \frac{1}{a^2}$$

и въ томъ случаѣ, когда извѣстна несократимость дроби на какія либо числа простыя съ a, такъ какъ и въ этомъ случаѣ возможными остатками отъ дѣленія числителя и знаменателя дроби на a будутъ по прежнему

$$0, 1, 2, \ldots, a-1.$$

Установивъ это, возьмемъ рядъ послѣдовательныхъ простыхъ чиселъ

$$\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 3,\ \alpha_3 = 5,\ \alpha_4 = 7,\ \alpha_5 = 11, \ldots,$$

и назовемъ событіемъ E_n несократимость дроби на

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n.$$

Вѣроятность такого событія E_n представится на основаніи теоремы умноженія вѣроятностей произведеніемъ

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{\alpha_n^2}\right).$$

Разсматривая наконецъ несократимость дроби, ни на какое число, какъ предѣльное событіе для ряда событій

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots,$$

выразимъ вѣроятность этой несократимости безконечнымъ произведеніемъ

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\left(1 - \frac{1}{7^2}\right)\left(1 - \frac{1}{11^2}\right) \cdots,$$

которое равно

$$\frac{6}{\pi^2},$$

какъ мы сейчасъ покажемъ.

Для доказательства, что полученное нами безконечное произведеніе равно $\frac{6}{\pi^2}$, обозначимъ его буквою P и разсмотримъ $\frac{1}{P}$.

Примѣняя къ каждой изъ дробей

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}, \frac{1}{1-\frac{1}{3^2}}, \frac{1}{1-\frac{1}{5^2}}, \ldots$$

извѣстную формулу

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots.,$$

получаемъ *)

$$\frac{1}{P} = \Sigma \frac{1}{2^{2\lambda}} \cdot \Sigma \frac{1}{3^{2\mu}} \cdot \Sigma \frac{1}{5^{2\nu}} \cdot \ldots = \Sigma \frac{1}{(2^\lambda\, 3^\mu\, 5^\nu \ldots)^2},$$

гдѣ подъ

$$\lambda, \mu, \nu, \ldots$$

мы подразумѣваемъ каждое изъ чиселъ

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

Каждое произведенiе

$$2^\lambda\, 3^\mu\, 5^\nu \ldots$$

равно цѣлому числу; съ другой стороны извѣстно, что всѣ цѣлыя числа можно представить подобными произведенiями и что каждому цѣлому числу соотвѣтствуетъ только одна система чиселъ

$$\lambda, \mu, \nu, \ldots,$$

при которой произведенiе

$$2^\lambda\, 3^\mu\, 5^\nu \ldots$$

равно этому числу. Поэтому полученная нами сумма

$$\Sigma \frac{1}{(2^\lambda\, 3^\mu\, 5^\nu \ldots)^2}$$

приводится къ извѣстной суммѣ

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots$$

равной

$$\frac{\pi^2}{6}.$$

Итакъ, по вышеприведеннымъ соображенiямъ, вѣроятность

---

*) Euler. Introductio in analysin infinitorum. T. I, 1748.

несократимости раціональной дроби, числитель и знаменатель которой написаны наудачу, выразится ирраціональнымъ числомъ

$$\frac{6}{\pi^2}.$$

Несократимость раціональной дроби можно также разсматривать какъ предѣльное событіе для другого ряда событій

$$E'_2, E'_3, \ldots, E'_n, \ldots,$$

гдѣ E'_n означаетъ несократимость такой дроби, числитель и знаменатель которой взяты на удачу изъ совокупности n чиселъ

$$1, 2, 3, \ldots, n.$$

Не останавливаясь на этомъ новомъ толкованіи задачи, замѣтимъ, что оно не измѣнитъ найденной нами величины вѣроятности

$$\frac{6}{\pi^2},$$

если вѣроятность событія E'_n мы выразимъ отношеніемъ

$$\frac{m}{n^2},$$

гдѣ m означаетъ число несократимыхъ дробей, числители и знаменатели которыхъ взяты изъ совокупности

$$1, 2, 3, \ldots, n.$$

Другой примѣръ предѣльныхъ событій доставитъ намъ слѣдующая задача.

Прямая линія AB раздѣлена точкою C на двѣ опредѣленныя части. Затѣмъ та же прямая раздѣлена на три части двумя точками P и Q, изъ которыхъ первая поставлена на удачу на AC, а вторая поставлена также наудачу на CB.

A P C Q B

Требуется опредѣлить вѣроятность, что

$$AP, PQ, QB$$

могутъ быть сторонами одного трехугольника. Иначе сказать,

требуется опредѣлить вѣроятность, что каждая изъ трехъ длинъ

$$AP,\ PQ,\ QB$$

меньше суммы двухъ остальныхъ.

Чтобы придать поставленному вопросу опредѣленный смыслъ, прежде всего положимъ, что прямая AB раздѣлена $2n-1$ точками

$$D_1,\ D_2, \ldots,\ D_{2n-1}$$

на $2n$ равныхъ частей

$$AD_1,\ D_1 D_2, \ldots,\ D_{2n-1} B,$$

общую длину которыхъ обозначимъ буквою ε. Пусть вмѣстѣ съ тѣмъ цѣлыя числа k и l опредѣляются неравенствами

$$k\varepsilon < AC < (k+1)\varepsilon$$

и

$$(l-1)\varepsilon < BC < l\varepsilon,$$

такъ что

$$(k+l-1)\varepsilon < AB = 2n\varepsilon < (k+l+1)\varepsilon$$

и потому

$$k+l=2n,$$

при чемъ для сокращенія разсужденій мы не останавливаемся на тѣхъ случаяхъ, когда одна изъ точекъ D_1, $D_2, \ldots,$ D_{2n-1} совпадаетъ съ C.

Ограничимъ затѣмъ положеніе точекъ P и Q условіемъ, что онѣ не могутъ совпадать съ другими точками прямой AB, кромѣ указанныхъ нами $2n-1$ точекъ D_1, $D_2, \ldots,$ D_{2n-1}. При такихъ условіяхъ для AP возможны только слѣдующія значенія

$$\varepsilon,\ 2\varepsilon, \ldots,\ k\varepsilon,$$

а для BQ возможны только слѣдующія значенія

$$\varepsilon,\ 2\varepsilon, \ldots,\ (l-1)\varepsilon.$$

Соединяя каждое возможное значеніе AP съ каждымъ возможнымъ значеніемъ BQ, получаемъ

$$k(l-1)$$

случаевъ, которые мы будемъ считать не только единственно возможными, но и равновозможными.

Переходя къ счету тѣхъ случаевъ, когда

$$AP,\ PQ,\ QB$$

могутъ быть сторонами одного трехугольника, для опредѣленности положимъ

$$AC < CB.$$

Случаи, къ счету которыхъ мы переходимъ, опредѣляются неравенствами

$$AP < PB,\ PQ < AP + BQ,\ AQ > BQ.$$

Первое изъ этихъ неравенствъ выполняется при всѣхъ возможныхъ положеніяхъ точки P, ибо

$$AP < AC < CB < PB,$$

а остальныя два приведутся къ слѣдующимъ

$$x + y > n > y,$$

если положимъ

$$AP = x\varepsilon,\ BQ = y\varepsilon.$$

Совокупность всѣхъ случаевъ, удовлетворяющихъ этимъ условіямъ, не трудно расположить въ таблицу:

$x=2$	$x=3$	$x=4$		$x=k$
$y=n-1$	$y=n-1$	$y=n-1$		$y=n-1$
	$y=n-2$	$y=n-2$		$y=n-2$
		$y=n-3$		....
				....
				$y=n-k+1$

Изъ таблицы видно, что число разсматриваемыхъ нами случаевъ, въ которыхъ AP, PQ и QB могутъ быть сторонами одного трехугольника, равно

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}.$$

Раздѣливъ это число на общее число

$$k(l-1)$$

допускаемыхъ нами случаевъ, находимъ, что при сдѣланныхъ нами предположеніяхъ вѣроятность возможности составить изъ

$$AP,\ PQ,\ QB$$

трехугольникъ выражается дробью

$$\frac{k-1}{2(l-1)}.$$

Наконецъ, для устраненія ограниченій, въ силу которыхъ точки P и Q могутъ совпадать только съ опредѣленными точками отрѣзковъ AC и CB, станемъ увеличивать n безпредѣльно.

Такъ какъ при безпредѣльномъ возрастаніи числа n дробь

$$\frac{k-1}{2(l-1)}$$

приближается къ предѣлу

$$\frac{1}{2}\,\frac{AC}{BC},$$

то на основаніи вышеизложенныхъ соображеній мы можемъ принять

$$\frac{1}{2}\,\frac{AC}{BC}$$

за искомую вѣроятность, что AP, PQ, QB могутъ быть сторонами одного треугольника.

Надо однако помнить, что для искомой вѣроятности мы могли бы получить совершенно иныя величины, если бы замѣнили другими нѣкоторыя изъ предположеній, введенныхъ нами въ рѣшеніе задачи, но не высказанныхъ при ея постановкѣ. Къ такимъ предположеніямъ, обусловливающимъ нашъ выводъ, принадлежитъ, напримѣръ, равновозможность установленныхъ нами $k(l-1)$ случаевъ.

Подобнымъ образомъ можно было бы разсмотрѣть разнообразные частные вопросы; но такой разборъ отдѣльныхъ вопросовъ былъ бы слишкомъ долгимъ и не доставилъ бы намъ опредѣленныхъ правилъ для рѣшенія другихъ вопросовъ въ виду

того, что онъ требуетъ особыхъ соображеній для каждаго частнаго случая и заставляетъ кромѣ искомой вѣроятности вычислять другія вѣроятности, для которыхъ искомая служитъ предѣломъ.

Для сокращенія выводовъ и для сообщенія имъ бо́льшей ясности и опредѣленности, во многихъ случаяхъ, можно съ успѣхомъ воспользоваться расширеніемъ понятія о вѣроятности, чѣмъ мы и займемся въ слѣдующихъ параграфахъ.

Замѣтимъ, что разобранный сейчасъ вопросъ о возможности образовать трехугольникъ принадлежитъ къ числу многихъ случаевъ, о которыхъ будетъ идти рѣчь; а задачу Чебышева и ей подобныя нельзя причислять къ нимъ.

§ 29. Положимъ, что совокупность возможныхъ значеній X состоитъ не изъ конечнаго числа различныхъ чиселъ, а изъ всѣхъ чиселъ, лежащихъ между данными предѣлами

$$A \text{ и } B.$$

Положимъ далѣе, что о вѣроятности отдѣльныхъ значеній X нѣтъ уже рѣчи и вмѣсто того возникаетъ вопросъ о вѣроятности, что X лежитъ въ какомъ нибудь данномъ промежуткѣ.

Въ этомъ случаѣ, уподобляя вѣроятность массѣ и вводя понятіе о *плотности* вѣроятности, аналогичное понятію о плотности массы, мы будемъ вѣроятность каждой изъ четырехъ системъ неравенствъ

$$1)\ a < X < b,\quad 2)\ a \leqq X < b,\quad 3)\ a < X \leqq b,\quad 4)\ a \leqq X \leqq b$$

выражать однимъ и тѣмъ же интеграломъ

$$(10) \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Функцію $f(x)$, которая стоитъ подъ знакомъ интеграла, мы назовемъ *плотностью* вѣроятности и будемъ устанавливать, въ каждомъ частномъ случаѣ, болѣе или менѣе произвольно, соблюдая слѣдующія условія:

$$1)\ f(x) \leqq 0 \text{ при } A \leqq x \leqq B,$$

2) $f(x)=0$ при $x<A$ и при $x>B$,

3) $\int_A^B f(x)\,dx=1$.

Первое изъ этихъ трехъ условій вызывается тѣмъ соображеніемъ, что вѣроятность должна оставаться всегда числомъ положительнымъ, или нулемъ; а второе и третье тѣмъ, что X, по предположенію, лежитъ между A и B и не можетъ имѣть значеній, выходящихъ изъ этихъ предѣловъ.

Простѣйшее предположеніе о функціи $f(x)$, которое мы обыкновенно будемъ дѣлать, выражается равенствомъ

$$f(x)=\text{пост. при } A \leqq x \leqq B,$$

при чемъ постоянное значеніе $f(x)$ равно

$$\frac{1}{B-A},$$

въ силу условія

$$\int_A^B f(x)\,dx=1.$$

При такомъ предположеніи, для каждыхъ двухъ равныхъ промежутковъ, заключающихся между A и B, вѣроятности, что X лежитъ въ этихъ промежуткахъ, выражаются равными числами, и соотвѣтственно этому можно сказать, что всѣ возможныя значенія X представляются намъ равновозможными.

Другое замѣчательное предположеніе о $f(x)$ относится къ тому случаю, когда малымъ величинамъ X^2 мы придаемъ значительно большую вѣроятность чѣмъ большимъ, но не находимъ возможнымъ ограничить значенія X какимъ нибудь опредѣленнымъ промежуткомъ. Это второе предположеніе, часто принимаемое, выражается равенствами

$$A=-\infty,\ B=+\infty$$
$$f(x)=Ce^{-k^2x^2},$$

гдѣ C и k числа постоянныя, которыя въ силу условія

$$\int_A^B f(x)\,dx=1$$

должны быть связаны уравненіемъ

$$C = \frac{k}{\sqrt{\pi}},$$

такъ какъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{k}.$$

Расширивъ такимъ образомъ понятіе о вѣроятности, мы вмѣстѣ съ тѣмъ расширимъ и понятіе о математическомъ ожиданіи. Именно, математическими ожиданіями

$$X,\ X^2,\ X^3, \ldots$$

мы назовемъ соотвѣтственно интегралы

$$\int_A^B xf(x)\,dx,\quad \int_A^B x^2 f(x)\,dx,\quad \int_A^B x^3 f(x)\,dx, \ldots$$

и вообще математическимъ ожиданіемъ $\varphi(X)$ мы назовемъ интегралъ

$$(11)\qquad \int_A^B \varphi(x) f(x)\,dx.$$

Напримѣръ, при

$$f(x) = \frac{1}{B-A}$$

математическое ожиданіе X равно

$$\int_A^B \frac{xdx}{B-A} = \frac{B+A}{2},$$

а математическое ожиданіе X^2 равно

$$\int_A^B \frac{x^2\,dx}{A-B} = \frac{A^2+AB+B^2}{3};$$

если же

$$A = -\infty,\quad B = +\infty \quad \text{и} \quad f(x) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2x^2},$$

то математическое ожиданіе X равно нулю, а математическое ожиданіе X^2 равно

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2x^2} x^2\,dx = \frac{1}{2k^2}.$$

Разсматривая двѣ или нѣсколько величинъ, подобныхъ X, мы прежде всего выдѣлимъ случай независимыхъ величинъ, какъ простѣйшій. Двѣ величины X и Y, возможныя значенія которыхъ состоятъ изъ всѣхъ чиселъ, лежащихъ въ данныхъ предѣлахъ, мы называемъ независимыми другъ отъ друга, если для любыхъ двухъ чиселъ

$$a,\ b$$

и для двухъ другихъ любыхъ чиселъ

$$c,\ \partial$$

мы можемъ выразить вѣроятность неравенствъ

$$a \leqq X \leqq b$$

интеграломъ

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

а вѣроятность неравенствъ

$$c \leqq Y \leqq \partial$$

интеграломъ

$$\int_c^\partial f_1(y)\,dy,$$

гдѣ $f(x)$ сохраняетъ одинаковую величину какъ при неизвѣстномъ значеніи Y, такъ и при всякомъ данномъ значеніи Y, а $f_1(y)$ сохраняетъ одинаковую величину какъ при неизвѣстномъ значеніи X, такъ и при всякомъ данномъ значеніи X.

Для такихъ величинъ X и Y мы можемъ вѣроятность выполненіи неравенствъ

$$a \leqq X \leqq b$$

вмѣстѣ съ неравенствами

$$c \leqq Y \leqq \partial$$

представить двукратнымъ интеграломъ

$$\int_c^\partial \int_a^b f(x) f_1(y)\,dx\,hy = \int_a^b f(x)\,dx \int_c^\partial f_1(y)\,dy,$$

сохраняя теорему умноженія вѣроятностей. И вообще интегралъ

$$\int\int f(x) f_1(y)\,dx\,dy,$$

распространенный на всѣ значенія x и y, которыя удовлетворяютъ тѣмъ или другимъ неравенствамъ, будетъ выражать у насъ вѣроятность, что X и Y удовлетворяютъ подобнымъ же неравенствамъ.

Переходя отъ случая независимыхъ величинъ къ общему, мы должны вмѣсто произведенія $f(x)f_1(y)$ ввести нѣкоторую функцію $\varphi(x, y)$ и можемъ вѣроятность, что X и Y удовлетворяютъ опредѣленнымъ неравенствамъ, выражать двукратнымъ интеграломъ

(12) $$\int\int\varphi(x, y)\,dx\,dy,$$

распространеннымъ, конечно, на значенія x и y, которыя удовлетворяютъ такимъ же неравенствамъ.

При этомъ функцію $\varphi(x, y)$, двухъ чиселъ x и y, мы назовемъ также плотностью вѣроятности и будемъ устанавливать ее болѣе или менѣе произвольно, наблюдая однако, чтобы она не получала отрицательныхъ значеній и чтобы интегралъ

$$\int\int\varphi(x, y)\,dx\,dy$$

приводился къ единицѣ, при распространеніи его на всѣ возможныя значенія x и y.

Простѣйшее предположеніе о функціи $\varphi(x, y)$ состоитъ въ томъ, что она сохраняетъ постоянную величину для значеній x и y, удовлетворяющихъ извѣстнымъ неравенствамъ, и обращается въ нуль для прочихъ значеній x и y. При такомъ предположеніи, обращаясь къ геометрическимъ соображеніямъ и разсматривая X и Y какъ обыкновенныя координаты точки на плоскости, мы легко приходимъ къ слѣдующему заключенію.

Если $\varphi(x, y)$ мы разсматриваемъ какъ функцію координатъ x и y различныхъ точекъ плоскости, и если S означаетъ величину всей площади, внутри которой $\varphi(x, y)$ сохраняетъ постоянное значеніе, отличное отъ нуля, а s означаетъ величину какойнибудь площади, составляющей часть первой, то отношеніе

$$\frac{s}{S}$$

выразитъ величину вѣроятности, что точка, опредѣленная координатами X и Y, лежитъ внутри послѣдней площади, величина которой равна s.

Расширенію понятія о вѣроятности соотвѣтствуетъ и расширеніе понятія о математическомъ ожиданіи; именно, математическимъ ожиданіемъ $\psi(x, y)$ мы назовемъ интегралъ

$$(13) \qquad \int\int \psi(x, y)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy,$$

распространенный на всѣ значенія x и y.

Сказанное нами о двухъ величинахъ X и Y легко распространить на любое число подобныхъ величинъ, на чемъ мы не считаемъ нужнымъ останавливаться.

Приложимъ указанныя нами основанія къ ряду задачъ, начиная съ той, которую мы разсматривали въ предыдущемъ параграфѣ, на другихъ основаніяхъ.

§ 30. *Задача 1ая.* Прямая линія AB раздѣлена точкою C на двѣ опредѣленныя части. Затѣмъ таже прямая раздѣлена на три части двумя точками P и Q, изъ которыхъ первая поставлена наудачу на AC, а вторая поставлена также наудачу на CB.

$$A \overset{\quad P \qquad\quad C \qquad\qquad\qquad Q}{\rule{8cm}{0.4pt}} B$$

Требуется опредѣлить вѣроятность, что

$$AP, \; PQ, \; QB$$

могутъ быть сторонами одного треугольника.

Рѣшеніе. Обращаясь къ геометрическимъ соображеніямъ, будемъ разсматривать длины AP и BQ какъ обыкновенныя прямолинейныя прямоугольныя координаты

$$X, \; Y$$

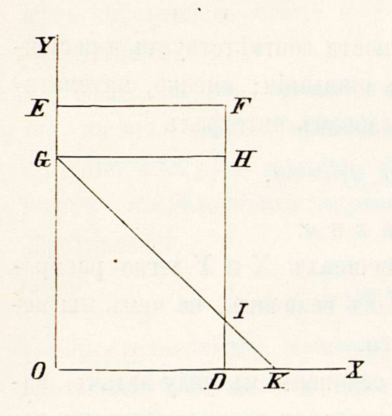
нѣкоторой точки M на плоскости.

На приложенномъ чертежѣ

$$OD = AC, \; OE = CB > AC, \; OG = OK = \frac{AB}{2}$$

$$OY \perp OX, \; GH \parallel EF \parallel OX, \; DH \parallel OY.$$

Разсматриваемая точка M во всѣхъ случаяхъ лежитъ внутри прямоугольника $OEFD$.



Въ тѣхъ же случаяхъ, когда

$$AP,\ PQ,\ QB$$

могутъ быть сторонами одного трехугольника, координаты точки M должны удовлетворять неравенствамъ

$$X < \frac{AB}{2},\ Y < \frac{AB}{2},$$

$$X + Y > \frac{AB}{2},$$

при выполненіи которыхъ точка M лежитъ внутри трехугольника GHI. Поэтому искомая вѣроятность, что

$$AP,\ PQ,\ QB$$

могутъ быть сторонами одного трехугольника, выразится отношеніемъ площади трехугольника GHI къ площади прямоугольника $OEFD$, если только мы будемъ считать всѣ положенія точки M внутри прямоугольника $OEFD$ равновозможными, т. е. будемъ считать плотность вѣроятности $\varphi(x, y)$ числомъ постояннымъ внутри прямоугольника $OEFD$.

Замѣчая наконецъ, что отношеніе площади трехугольника GHI къ площади прямоугольника $OEFD$ равно

$$\frac{1}{2}\,\frac{AC}{BC},$$

приходимъ къ тому же выраженію искомой вѣроятности, которое было выведено раньше другимъ путемъ.

При другихъ предположеніяхъ о плотности вѣроятности придемъ, конечно, къ инымъ выводамъ. Напримѣръ, если плотность вѣроятности для различныхъ положеній точки M будемъ считать пропорціональной произведенію координатъ ея, то разсматриваемая нами вѣроятность выразится отношеніемъ интеграловъ

$$\frac{\displaystyle\int_{x=0}^{x=a}\int_{y=\frac{a+b}{2}-x}^{y=\frac{a+b}{2}} xy\,dy\,dx}{\displaystyle\int_{x=0}^{x=a}\int_{y=0}^{y=b} xy\,dx\,dy},$$

гдѣ буквой a мы обозначили длину AC и буквой b длину BC.

Такъ какъ

$$\int_{x=0}^{x=a}\int_{y=\frac{a+b}{2}-x}^{y=\frac{a+b}{2}} xy\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=a} \frac{x^2(a+b-x)}{2}\,dx = \frac{a^3(4b+a)}{24}$$

и

$$\int_{x=0}^{x=a}\int_{y=0}^{y=b} xy\,dy\,dx = \frac{a^2 b^2}{4},$$

то при новомъ предположеніи разсматриваемая нами вѣроятность оказывается равною

$$\frac{1}{2}\,\frac{a}{b}\cdot\frac{4b+a}{3b}$$

и потому отличается отъ полученной прежде множителемъ

$$\frac{4b+a}{3b}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда

$$AC = BC,$$

вѣроятность, что

$$AP,\ PQ,\ QB$$

могутъ быть сторонами одного трехугольника, равна $\frac{1}{2}$ при первомъ предположеніи и $\frac{5}{6}$ при второмъ.

Задача 2. На прямой линіи AB поставлены наудачу двѣ точки, изъ которыхъ ближайшую къ A мы обозначимъ буквою P, а ближайшую къ B обозначимъ буквою Q.

$A \qquad P \qquad\qquad Q \qquad\qquad B$

Требуется опредѣлить вѣроятность, что

$$AP,\ PQ,\ QB$$

могутъ быть сторонами одного трехугольника.

Рѣшеніе. Разсматривая по прежнему

$$AP \text{ и } QB$$

какъ обыкновенныя координаты

$$X,\quad Y$$

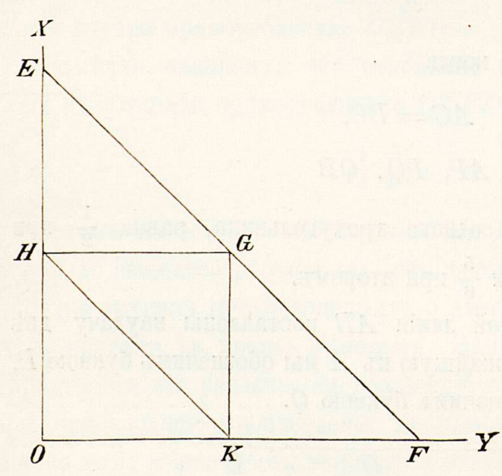
нѣкоторой точки M на плоскости, имѣемъ

$$X > 0,\ Y > 0,\ X + Y < AB.$$

Отсюда слѣдуетъ, что точка M лежитъ внутри трехугольника EOF, ограниченнаго осями координатъ OX, OY и прямою EF, которая отсѣкаетъ отъ координатныхъ осей отрѣзки

$$OE,\quad OF,$$

равные AB. Для всѣхъ положеній точки M, внутри трехугольника EOF, мы будемъ считать плотность вѣроятности одинаковою, и соотвѣтственно этому скажемъ, что всѣ случаи дѣленія прямой AB, двумя точками P и Q, на три части представляются намъ равновозможными.



При такихъ условіяхъ разысканіе искомой вѣроятности сводится къ вычисленію величины площади, внутри которой лежитъ точка M въ тѣхъ и только въ тѣхъ случаяхъ, когда

$$AP,\ PQ \text{ и } QB$$

могутъ быть сторонами одного трехугольника: отношеніе этой площади къ площади трехугольника EOF выразитъ искомую вѣроятность. Съ другой стороны мы знаемъ, что

$$AP = X,\ PQ = AB - X - Y,\ QB = Y$$

могутъ быть сторонами одного трехугольника тогда и только тогда, когда

$$X < \frac{AB}{2},\ Y < \frac{AB}{2},\ X + Y > \frac{AB}{2}.$$

При выполненіи этихъ неравенствъ точка M лежитъ внутри трехугольника HGK, ограниченнаго прямыми HG, GK, HK, которыя соединяютъ средины прямыхъ OE, EF и OF; и обратно для всѣхъ положеній точки M внутри трехугольника HGK эти неравенства выполнены. Отсюда уже нетрудно заключить, что искомая вѣроятность выражается отношеніемъ

$$\frac{\Delta HGK}{\Delta OEF},$$

которое равно $\frac{1}{4}$.

Итакъ, если всѣ случаи дѣленія прямой AB на три части

$$AP,\ PQ,\ QB$$

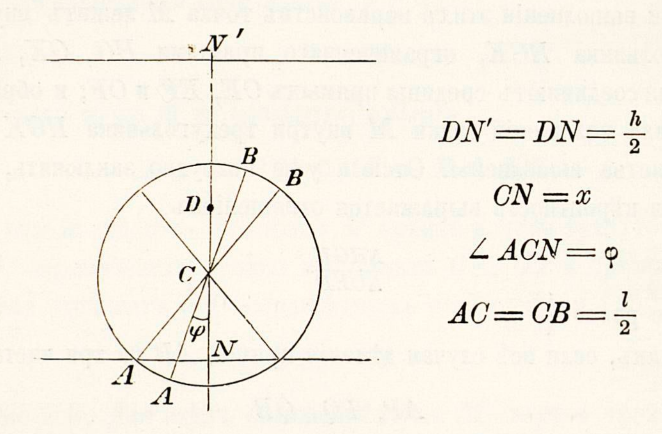
мы признаемъ равновозможными, въ объясненномъ выше смыслѣ, то вѣроятность, что изъ этихъ трехъ частей можно образовать трехугольникъ, равна $\frac{1}{4}$.

§ 31. *Задача 3ья (Бюффона).* На плоскость, покрытую рядомъ параллельныхъ полосъ одной и той же ширины h, брошена наудачу безконечно тонкая игла, длина которой l меньше ширины полосъ h. Найти вѣроятность, что эта игла не помѣстится вся въ одной полосѣ, а пересѣчетъ одну изъ прямыхъ, отдѣляющихъ двѣ смежныя полосы.

Рѣшеніе. Разсматривая различныя возможныя положенія иглы на плоскости, назовемъ буквою x разстоянія средины иглы до ближайшей изъ параллельныхъ прямыхъ, образующихъ вышеупомянутыя полосы; а буквою φ назовемъ величину остраго угла, который образуетъ игла съ перпендикуляромъ къ па-

правленію полосъ. Всѣ возможныя значенія x заключаются между 0 и $\frac{1}{2}h$; мы будемъ считать ихъ равновозможными. Точно такъ же мы будемъ считать равновозможными и всѣ возможныя значенія φ, которыя заключаются между 0 и $\frac{\pi}{2}$.

Затѣмъ для большей наглядности выводовъ возьмемъ произвольную длину за единицу мѣры и будемъ разсматривать x и φ какъ обыкновенныя прямолинейныя прямоугольныя координаты нѣкоторой точки M плоскости.



$$DN' = DN = \frac{h}{2}$$

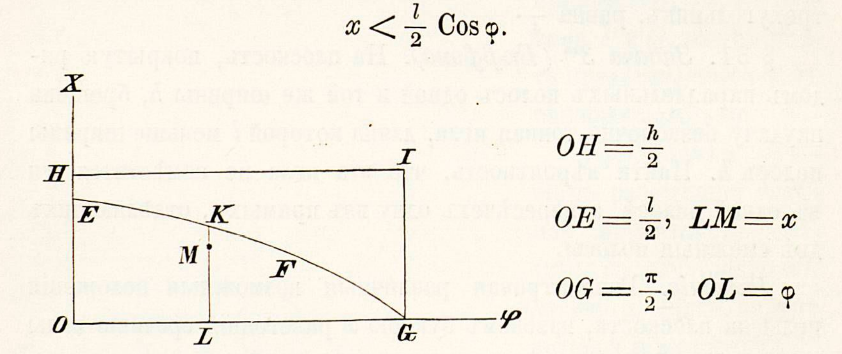
$$CN = x$$

$$\angle ACN = \varphi$$

$$AC = CB = \frac{l}{2}$$

Изъ чертежа видно, что игла не помѣщается внутри одной полосы въ тѣхъ и только тѣхъ случаяхъ, когда

$$x < \frac{l}{2} \operatorname{Cos} \varphi.$$



$$OH = \frac{h}{2}$$

$$OE = \frac{l}{2}, \quad LM = x$$

$$OG = \frac{\pi}{2}, \quad OL = \varphi$$

Обращаясь ко второму чертежу, замѣчаемъ, что положенія точки M, соотвѣтствующія только что указаннымъ случаямъ,

отдѣляются отъ остальныхъ возможныхъ ея положеній кривою линіею $EKFG$, которая опредѣляется уравненіемъ

$$x = \frac{l}{2} \operatorname{Cos} \varphi,$$

и заполняютъ площадь $OEKFGO$, ограниченную осями координатъ и кривою $EKFG$. Слѣдовательно, при сдѣланныхъ предположеніяхъ, искомая вѣроятность, что игла не помѣстится въ одной полосѣ, выразится отношеніемъ площади $OEKFGO$ къ площади прямоугольника $OHIG$, которое равно

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} \operatorname{Cos} \varphi \, d\varphi}{\frac{h}{2} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{2l}{h\pi}.$$

Эта замѣчательная задача поставлена Бюффономъ какъ первый примѣръ исчисленія вѣроятностей, требующій геометрическихъ соображеній. Краткое указаніе на нее можно найти въ Histoire de l'Académie Royale des Sciences, за 1733 годъ; а ея рѣшеніе, согласное съ выше приведеннымъ, дано въ сочиненіи Бюффона «Essai d'arithmétique morale», которое появилось въ 1777 году какъ добавленіе къ естественной исторіи Бюффона.

По поводу задачи Бюффона можно упомянуть о Цюрихскомъ профессорѣ астрономѣ Р. Вольфѣ, который въ теченіе многихъ лѣтъ производилъ рядъ опытовъ *) для выясненія вопроса о приложимости выводовъ исчисленія вѣроятности къ дѣйствительности, на основаніи теоремы Бернулли. Мы приведемъ результаты только тѣхъ опытовъ Р. Вольфа, которые относятся къ задачѣ Бюффона. Въ опытахъ Р. Вольфа ширина полосъ была 45 миллиметровъ, а длина бросаемой иглы 36 миллиметровъ, и потому вѣроятность непомѣщенія иглы въ одной полосѣ, на

*) R. Wolf. Versuche zur Vergleichung der Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit (Mitth. der Natur. Ges. in Bern 1849—1853). Результаты дальнѣйшихъ опытовъ Р. Вольфа опубликованы въ Vierteljahrsschrift der natur. Ges. in Zürich за 1881, 1882, 1883 и 1893 года.

основанiи формулы Бюффона, выражалась числомъ

$$\frac{72}{45\pi} = 0{,}5093.$$

Игла была брошена на плоскость 5000 разъ, при чемъ 2468 разъ она помѣстилась вся внутри одной полосы, а 2532 раза отчасти въ одной, отчасти въ другой полосѣ; такъ что отношенiе числа бросанiй, при которыхъ игла не помѣстилась внутри одной полосы, къ числу всѣхъ бросанiй равно

$$\frac{2532}{5000} = 0{,}5064$$

и довольно близко подходитъ къ указанной выше вѣроятности непомѣщенiя иглы въ одной полосѣ.

Въ этомъ результатѣ можно усмотрѣть нѣкоторое подтвержденiе теоремы Бернулли опытомъ. Интересно замѣтить, что результатомъ опытовъ Р. Вольфа можно было бы воспользоваться и для вычисленiя числа π; стоитъ только, на основанiи теоремы Бернулли, допустить приближенное равенство

$$\frac{72}{45\pi} = \frac{2532}{5000}.$$

Такимъ образомъ находимъ для π величину

$$3{,}159\ldots,$$

которая отличается отъ истинной менѣе чѣмъ на

$$0{,}02.$$

§ 31. *Задача 4^ая^*. (Обобщенiе задачи Бюффона). На плоскость, покрытую попрежнему рядомъ параллельныхъ полосъ одной и той же ширины h, брошена на удачу площадка, ограниченная выпуклымъ контуромъ и настолько малая, что ни въ какомъ случаѣ она не можетъ лечь сразу въ трехъ полосахъ, а должна помѣститься вся въ одной полосѣ, или отчасти въ одной, отчасти въ другой полосѣ. Найти вѣроятность, что эта площадка не помѣстится вся въ одной полосѣ.

Рѣшенiе. Начнемъ съ предположенiя, что площадка, бро-

шенная на плоскость, ограничена выпуклымъ многоугольникомъ, и для опредѣленности остановимся на случаѣ пятиугольника. Стороны этого пятиугольника мы отличимъ другъ отъ друга буквами a, b, c, $д$, e, которыми будемъ обозначать соотвѣтственнымъ образомъ и длины сторонъ. Затѣмъ, чтобы привести новую задачу къ прежней, замѣтимъ, что во всѣхъ случаяхъ, когда площадка не помѣстится внутри одной полосы, двѣ стороны контура будутъ пересѣчены одною изъ прямыхъ, разграничивающихъ полосы.

На основанiи этого замѣчанiя мы разобьемъ событiе, вѣроятность котораго требуется найти, на 10 видовъ

$$ab,\ ac,\ aд,\ ae,\ bc,\ bд,\ be,\ cд,\ ce,\ дe:$$

видъ ab состоитъ въ пересѣченiи сторонъ a и b одною изъ прямыхъ, разграничивающихъ полосы; видъ ac состоитъ въ пересѣченiи сторонъ a и c одною изъ тѣхъ же прямыхъ и т. д.

Указанные 10 видовъ мы будемъ разсматривать какъ несовмѣстимые, приписывая вѣроятность нуль всѣмъ случаямъ, когда одна изъ вершинъ пятиугольника лежитъ, какъ разъ, на границѣ двухъ полосъ. Обозначивъ вѣроятности событiй

$$ab,\ ac,\ aд,\ ae,\ bc,\ bд,\ be,\ cд,\ ce,\ дe$$

символами

$$(ab),\ (ac),\ (aд),\ (ae),\ (bc),\ (bд),\ldots,$$

а искомую вѣроятность, что площадка ляжетъ отчасти въ одной, отчасти въ другой полосѣ, буквою P, мы на основанiи теоремы сложенiя вѣроятностей установимъ равенство

$$P=(ab)+(ac)+(aд)+(ae)+(bc)+(bд)+(be)+(cд)+(ce)+(дe).$$

Въ силу той же теоремы сложенiя вѣроятностей имѣемъ

$$(a)=(ab)+(ac)+(aд)+(ae),$$
$$(b)=(ab)+(bc)+(bд)+(be),$$
$$(c)=(ac)+(bc)+(cд)+(ce),$$
$$(д)=(aд)+(bд)+(cд)+(дe),$$
$$(e)=(ae)+(be)+(ce)+(дe),$$

гдѣ (a) означаетъ вѣроятность, что сторона a пройдетъ изъ одной полосы въ другую, (b) означаетъ подобную же вѣроятность для стороны b и т. д. Послѣднія вѣроятности на основаніи выше указаннаго рѣшенія задачи Бюффона опредѣляются равенствами

$$(a)=\frac{2a}{h\pi},\ (b)=\frac{2b}{h\pi},\ (c)=\frac{2c}{h\pi},\ (д)=\frac{2д}{h\pi},\ (e)=\frac{2e}{h\pi}.$$

Изъ вышеприведенныхъ равенствъ находимъ, что сумма

$$(a)+(b)+(c)+(д)+(e)$$

равна какъ числу $\frac{2(a+b+c+д+e)}{h\pi}$,

такъ и удвоенной суммѣ

$$(ab)+(ac)+(aд)+(ae)+(bc)+(bд)+(be)+(cд)+(ce)+(дe),$$

которая выражаетъ искомую вѣроятность P. Слѣдовательно

$$2P=\frac{2(a+b+c+д+e)}{h\pi}$$

и потому искомая вѣроятность P равна отношенію

$$\frac{a+b+c+д+e}{h\pi}$$

длины контура къ произведенію ширины полосъ на число π.

И не трудно понять, что этотъ выводъ относится не только къ пятиугольнику, но и къ любому выпуклому, достаточно малому многоугольнику. А затѣмъ, по способу предѣловъ, можно распространить тотъ же выводъ и на криволинейные контуры.

Итакъ искомая нами вѣроятность, что брошенная площадка не помѣстится вся внутри одной полосы, выражается отношеніемъ длины контура площадки къ произведенію ширины полосъ на число π.

§ 33. *Задача 5ая*. На плоскость, покрытую сѣтью равныхъ трехугольниковъ, брошена безконечно тонкая игла, длина которой l меньше каждой изъ высотъ трехугольниковъ. Найти вѣроятность, что эта игла помѣстится вся внутри одного трехугольника.

Рѣшеніе. Пусть ABC будетъ тотъ изъ трехугольниковъ сѣти, внутрь котораго попала средина иглы; величины угловъ

его обозначимъ буквами A, B, C, а величины сторонъ малыми буквами a, b, c.

Всѣ положенія средины иглы будемъ считать равновозможными при всякомъ направленіи иглы.

Предполагая затѣмъ, что игла имѣетъ какое нибудь данное направленіе, проведемъ черезъ вершины трехугольника ABC, параллельно направленію иглы, прямыя

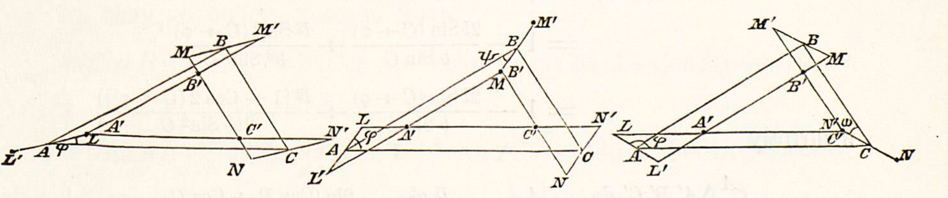
$$LAL',\ MBM',\ NCN',$$

которыя въ точкахъ A, B, C дѣлятся пополамъ и имѣютъ туже длину l, какъ и игла. Если концы этихъ прямыхъ соединить надлежащимъ образомъ прямыми параллельными сторонамъ трехугольника ABC, то получится внутри трехугольника ABC другой трехугольникъ $A'B'C'$, отдѣляющій для даннаго направленія иглы тѣ положенія средины ея, при которыхъ она лежитъ вся внутри ABC, отъ остальныхъ возможныхъ положеній средины иглы; такъ что въ тѣхъ случаяхъ, когда игла имѣетъ разсматриваемое направленіе, средина ея должна лежать внутри $A'B'C'$ для того, чтобы вся игла помѣщалась внутри ABC.

Построеніе трехугольника $A'B'C'$ видно изъ чертежей; изъ нихъ видно также, что направленіе иглы можно опредѣлять угломъ

$$\varphi = \angle LAC,$$

который въ случаѣ перваго чертежа лежитъ между 0 и A, въ случаѣ второго чертежа между A и $A + B$ и наконецъ въ случаѣ третьяго чертежа между $A + B$ и $A + C + B = \pi$.



Кромѣ φ полезно разсматривать въ случаѣ второго чертежа. уголъ

$$\psi = \angle MBA = \varphi - A,$$

и въ случаѣ третьяго чертежа уголъ

$$\omega = \angle N'CB = \varphi - A - B.$$

Всѣ направленія иглы мы будемъ считать равновозможными въ томъ смыслѣ, что всѣ величины φ отъ 0 до π будемъ разсматривать какъ равновозможныя. При такихъ условіяхъ искомая вѣроятность, что вся игла помѣстится внутри одного трехугольника разсматриваемой сѣти, выразится интеграломъ

$$\int_0^\pi \frac{\Delta A'\,B'\,C'}{\Delta ABC} \cdot \frac{d\varphi}{\pi},$$

который равенъ суммѣ

$$\int_0^A \frac{\Delta A'\,B'\,C'}{\Delta ABC} \cdot \frac{d\varphi}{\pi} + \int_0^B \frac{\Delta A'\,B'\,C'}{\Delta ABC} \cdot \frac{d\psi}{\pi} + \int_0^C \frac{\Delta A'\,B'\,C'}{\Delta ABC} \cdot \frac{d\omega}{\pi}.$$

Обращаясь къ интегралу

$$\int_0^A \frac{\Delta A'\,B'\,C'}{\Delta ABC} \frac{d\varphi}{\pi};$$

замѣчаемъ, что отношеніе площадей трехугольниковъ

$$A'B'C' \quad \text{и} \quad ABC$$

равно квадрату отношенія ихъ соотвѣтственныхъ сторонъ, и изъ перваго чертежа находимъ

$$A'C' = AC - C'\,N' = b - l\,\frac{\operatorname{Sin}(C+\varphi)}{\operatorname{Sin} C}.$$

Слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta A'\,B'\,C'}{\Delta ABC} &= \left(\frac{A'\,C'}{AC}\right)^2 = \left\{1 - \frac{l\operatorname{Sin}(C+\varphi)}{b\operatorname{Sin} C}\right\}^2 \\ &= 1 - \frac{2l\operatorname{Sin}(C+\varphi)}{b\operatorname{Sin} C} + \frac{l^2\operatorname{Sin}^2(C+\varphi)}{b^2\operatorname{Sin}^2 C} \\ &= 1 - \frac{2l\operatorname{Sin}(C+\varphi)}{b\operatorname{Sin} C} + \frac{l^2\,[1-\operatorname{Cos} 2\,(C+\varphi)]}{2b^2\operatorname{Sin}^2 C} \end{aligned}\right\}$$

и потому

$$\int_0^A \frac{\Delta A'\,B'\,C'}{\Delta ABC} \frac{d\varphi}{\pi} = \frac{A}{\pi}\left(1 + \frac{l^2\,a^2}{2\,Q^2}\right) - \frac{2la\,(\operatorname{Cos} B + \operatorname{Cos} C)}{Q\pi} + \frac{l^2\,a^2\,(\operatorname{Sin} 2B + \operatorname{Sin} 2C)}{4\,Q^2\,\pi},$$

гдѣ Q означаетъ удвоенную площадь трехугольника ABC, т. е. равно

$$ab \operatorname{Sin} C = ac \operatorname{Sin} B = bc \operatorname{Sin} A.$$

Подобнымъ же образомъ, при помощи второго и третьяго чертежа, находимъ

$$\int_0^B \frac{\Delta A'\,B'\,C'}{\Delta ABC}\frac{d\psi}{\pi} = \frac{B}{\pi}\left(1 + \frac{l^2 b^2}{2Q^2}\right) - \frac{2lb\,(\operatorname{Cos} A + \operatorname{Cos} C)}{Q\pi} + \frac{l^2 b^2 (\operatorname{Sin} 2A + \operatorname{Sin} 2C)}{4Q^2\pi}$$

и

$$\int_0^C \frac{\Delta A'\,B'\,C'}{\Delta ABC}\frac{d\omega}{\pi} = \frac{C}{\pi}\left(1 + \frac{l^2 b^2}{2Q^2}\right) - \frac{2lc\,(\operatorname{Cos} B + \operatorname{Cos} A)}{Q\pi} + \frac{l^2 c^2 (\operatorname{Sin} 2B + \operatorname{Sin} 2A)}{4Q^2\pi}.$$

Остается сложить найденныя величины трехъ интеграловъ, и мы получимъ выраженіе искомой вѣроятности въ видѣ алгебраической суммы

$$1 + \frac{l^2}{2\pi}\frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}{Q^2} - \frac{2l}{\pi}\frac{a(\operatorname{Cos} B + \operatorname{Cos} C) + b(\operatorname{Cos} A + \operatorname{Cos} C) + c(\operatorname{Cos} A + \operatorname{Cos} B)}{Q}$$
$$+ \frac{l^2}{4\pi}\frac{a^2(\operatorname{Sin} 2B + \operatorname{Sin} 2C) + b^2(\operatorname{Sin} 2A + \operatorname{Sin} 2C) + c^2(\operatorname{Sin} 2A + \operatorname{Sin} 2B)}{Q^2}.$$

Для упрощенія полученнаго выраженія обратимъ вниманіе на простыя равенства

$$a \operatorname{Cos} B + b \operatorname{Cos} A = c, \quad a^2 \operatorname{Sin} 2B + b^2 \operatorname{Sin} 2A = 2Q,$$
$$a \operatorname{Cos} C + c \operatorname{Cos} A = b, \quad a^2 \operatorname{Sin} 2C + c^2 \operatorname{Sin} 2A = 2Q,$$
$$b \operatorname{Cos} C + c \operatorname{Cos} B = a, \quad b^2 \operatorname{Sin} 2C + c^2 \operatorname{Sin} 2B = 2Q,$$

въ силу которыхъ должно быть

$$a(\operatorname{Cos} B + \operatorname{Cos} C) + b(\operatorname{Cos} A + \operatorname{Cos} C) + c(\operatorname{Cos} A + \operatorname{Cos} B) = a + b + c$$

и

$$a^2(\operatorname{Sin} 2B + \operatorname{Sin} 2C) + b^2(\operatorname{Sin} 2A + \operatorname{Sin} 2C) + c^2(\operatorname{Sin} 2A + \operatorname{Sin} 2B) = 6Q.$$

Пользуясь этими равенствами, находимъ, что искомая вѣроятность можетъ быть представлена алгебраическою суммою

$$1 + \frac{l^2 (Aa^2 + Bb^2 + Cc^2)}{2\pi Q^2} - \frac{l\,(4a + 4b + 4c - 3l)}{2\pi Q}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда сѣть состоитъ изъ равносторонних трехугольниковъ, имѣемъ

$$A = B = C = \frac{\pi}{3}, a = b = c, \ Q = a^2\frac{\sqrt{3}}{2};$$

тогда найденное нами выраженіе вѣроятности, что игла помѣстится вся внутри одного трехугольника, приводится къ слѣдующему

$$1 + \frac{2}{3}\left(\frac{l}{a}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\frac{l}{a}\left(4 - \frac{l}{a}\right).$$

Этотъ частный случай задачи былъ разсмотрѣнъ Буняковскимъ въ мемуарѣ «О приложеніи анализа вѣроятностей къ опредѣленію приближенныхъ величинъ трансцендентныхъ чиселъ»*) и въ сочиненіи «Основанія математической теоріи вѣроятностей». Но благодаря неудачному выбору порядка интегрированія вычисленія Буняковскаго отличаются значительною сложностью, которой и слѣдуетъ приписать погрѣшность, вкравшуюся въ окончательный результатъ этихъ вычисленій.

Полагая для примѣра $l = \frac{a}{\sqrt{3}}$, получимъ для искомой вѣроятности величину

$$1 + \frac{2}{9} - \frac{1}{\pi}\left(4 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0,1328.$$

§ 34. *Задача 6ая. О суммѣ независимыхъ векторовъ.* Ограничиваясь векторами на плоскости, положимъ, что они опредѣляются двумя системами обыкновенныхъ чиселъ

$$X,\ Y,\ Z, \ldots, W,$$
$$X',\ Y',\ Z', \ldots, W',$$

равносильными одной системѣ комплексныхъ чиселъ

$$X + X'i,\ Y + Y'i, \ldots, W + W'i;$$

сумма разсматриваемыхъ векторовъ опредѣляется двумя обык-

*) Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, VI Série, Sciences Mathém. et Phys. T. I. (III) 1837.

новенными числами

$$X + Y + Z + \ldots + W \quad \text{и} \quad X' + Y' + Z' + \ldots + W'.$$

Называя разсматриваемые векторы независимыми, мы предполагаемъ, что въ системѣ

$$X, X', Y, Y', \ldots, W, W'$$

могутъ быть связанными только числа, обозначенныя нами одинаковыми буквами. Обозначимъ, подобно тому какъ въ § 17, буквами $\rho, \sigma, \tau, \ldots, \omega$ вѣроятности равенствъ

$$X + X'i = x + x'i, \quad Y + Y'i = y + y'i, \ldots, \quad W + W'i = w + w'i,$$

такъ что

$$\Sigma\rho = \Sigma\sigma = \Sigma\tau = \ldots = \Sigma\omega = 1.$$

Затѣмъ положимъ

$$\Sigma\rho x = a, \quad \Sigma\sigma y = b, \ldots, \quad \Sigma\omega w = l,$$

$$\Sigma\rho(x - a)^2 = a_1, \quad \Sigma\sigma(y - b)^2 = b_1, \ldots, \quad \Sigma\omega(w - l)^2 = l_1,$$

$$\Sigma\rho x' = a', \quad \Sigma\sigma y' = b', \ldots, \quad \Sigma\omega w' = l',$$

$$\Sigma\rho(x' - a')^2 = a'_1, \quad \Sigma\sigma(y' - b')^2 = b'_1, \ldots, \quad \Sigma\omega(w' - l')^2 = l'_1,$$

$$\Sigma\rho(x - a)(x' - a') = \alpha, \quad \Sigma\sigma(y - b)(y' - b') = \beta, \ldots, \quad \Sigma\omega(w - l)(w' - l') = \lambda;$$

эти числа мы будемъ считать данными. Наша задача состоитъ въ приближенномъ вычисленіи вѣроятности, что суммы

$$X + Y + \ldots + W, \quad X' + Y' + \ldots + W'$$

удовлетворяютъ нѣкоторымъ неравенствамъ, при чемъ для возможной простоты изслѣдованія мы остановимся на такихъ неравенствахъ

$$t_1 < X + Y + \ldots + W - a - b - \ldots - l < t$$

и

$$t'_1 < X' + Y' + \ldots + W' - a' - b' - \ldots - l' < t',$$

гдѣ t_1, t, t'_1, t' мы считаемъ числами данными.

Рѣшеніе. Пользуясь, подобно прежнему, множителемъ Дирихле, представляемъ искомую вѣроятность въ видѣ двукратнаго

интеграла

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\frac{\delta\xi}{2}\operatorname{Sin}\frac{\delta'\eta}{2}}{\xi\eta}\Omega e^{-\frac{is\xi}{2}-\frac{is'\eta}{2}}d\xi d\eta,$$

гдѣ

$$\delta=t-t_1,\ \delta'=t'-t'_1,\ s=t+t_1,\ s'=t'+t'_1$$

и

$$\Omega=\Sigma\rho\sigma\ldots\omega e^{i(x+\ldots+w-a-\ldots-l)\xi+i(x'+\ldots+w'-a'-\ldots-l')\eta}$$

$$=\Sigma\rho e^{i(x-a)\xi+i(x'-a')\eta}\,\Sigma\sigma e^{i(y-b)\xi+i(y'-b')\eta}\ldots$$

Разлагая затѣмъ суммы

$$\Sigma\rho e^{i(x-a)\xi+i(x'-a')\eta},\ \Sigma\sigma e^{i(y-b)\xi+i(y'-b')\eta},\ldots$$

въ ряды по возрастающимъ степенямъ ξ и η, получаемъ

$$\Sigma\rho e^{i(x-a)\xi+i(x'-a')\eta}=1-\frac{a_1\xi^2+2\alpha\xi\eta+a'_1\eta^2}{2}+\ldots$$

$$\Sigma\sigma e^{i(y-b)\xi+i(y'-b')\eta}=1-\frac{b_1\xi^2+2\beta\xi\eta+b'_1\eta^2}{2}+\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma\omega e^{i(w-l)\xi+i(w'-l')\eta}=1-\frac{l_1\xi^2+2\lambda\xi\eta+l'_1\eta^2}{2}+\ldots,$$

откуда посредствомъ умноженія выводимъ

$$\Omega=1-\frac{A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2}{2}+\ldots$$

гдѣ

$$A=a_1+b_1+\ldots+l_1,\ B=\alpha+\beta+\ldots+\lambda,\ C=a'_1+b'_1+\ldots+l'_1.$$

Изъ указаннаго разложенія Ω по возрастающимъ степенямъ ξ и η заключаемъ, что эта функція мало отличается отъ показательной

$$e^{-\frac{A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2}{2}}.$$

Замѣняя на этомъ основаніи Ω показательной функціей, получаемъ для искомой вѣроятности приближенное выраженіе въ видѣ двукратнаго интеграла

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}\frac{\delta\xi}{2}\operatorname{Sin}\frac{\delta'\eta}{2}}{\eta\xi}e^{-\frac{A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2}{2}-\frac{si\xi}{2}-\frac{s'i\eta}{2}}d\eta d\xi,$$

который мы для краткости обозначимъ одною буквою P.

Для исключенія введенныхъ нами вспомогательныхъ чиселъ ξ и η разсматриваемъ P какъ функцію перемѣнныхъ t и t' и составляемъ производныя

$$\frac{dP}{dt}, \quad \frac{d^2 P}{dt\, dt'}.$$

Мы можемъ такимъ образомъ установить формулы

$$P = \int_{t_1}^{t} \frac{dP}{dt} dt = \int_{t_1}^{t} \int_{t'_1}^{t'} \frac{d^2 P}{dt\, dt'} dt dt'$$

и

$$\frac{d^2 P}{dt\, dt'} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2}{2} - it\xi - it'\eta} d\eta d\xi.$$

Что же касается послѣдняго двукратнаго интеграла, то, примѣняя къ нему, два раза, извѣстную формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\zeta^2 - 2q\zeta} d\zeta = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{\frac{q^2}{p}},$$

гдѣ p вещественное положительное число, а q любое комплексное число, безъ большого труда находимъ

$$\frac{d^2 P}{dt\, dt'} = \frac{1}{2\pi \sqrt{AC - B^2}} e^{-\frac{Ct^2 - 2Btt' + At'^2}{2(AC - B^2)}}.$$

Такимъ образомъ для искомой вѣроятности неравенствъ

$$t_1 < X + Y + \ldots + W - a - b - \ldots - l < t$$

и

$$t'_1 < X' + Y' + \ldots + W' - a' - b' - \ldots - l' < t'$$

мы получаемъ довольно простое приближенное выраженіе

$$\frac{1}{2\pi \sqrt{AC - B^2}} \int_{t_1}^{t} \int_{t'_1}^{t'} e^{-\frac{Ct^2 - 2Btt' + At'^2}{2(AC - B^2)}} dt dt'.$$

Принимая же во вниманіе, что всякую площадь можно разсматривать какъ предѣлъ суммы площадей прямоугольниковъ, стороны которыхъ сохраняютъ два опредѣленныхъ направленія, заключаемъ, что и вообще двукратный интегралъ

$$\frac{1}{2\pi \sqrt{AC - B^2}} \int\int e^{-\frac{Ct^2 - 2Btt' + At'^2}{2(AC - B^2)}} dt dt',$$

распространенный на всѣ значенія t и t', удовлетворяющія какимъ либо опредѣленнымъ неравенствамъ, представляетъ приближеннымъ образомъ вѣроятность, что такимъ неравенствамъ удовлетворяютъ величины

$$t = X + Y + \ldots + W - a - b - \ldots - l$$

и

$$t' = X' + Y' + \ldots + W' - a' - b' - \ldots - l'.$$

Вопросъ о погрѣшности этого приближеннаго вывода остается открытымъ.

Литература.

A. Bravais. Analyse mathématique sur les probabilités des erreurs de situation d'un point (Mém. présentés par div. sav. à l'Acad. Roy. des Sciences de l'Inst. de France. T. IX, 1846).

W. Crofton. On the Theory of Local Probability, applied to Straight Lines drawn at random in a plane, the method used being also extended to the proof of certain new Theorems in the Integral Calculus (Philos. Trans. London. CLVIII, 1868).

Ch. M. Schols. Théorie des erreurs dans le plan et dans l'espace (Ann. de l'Ecole polyt. de Delft. T. II, 1886).

Ch. M. Schols. Démonstration directe de la loi limite pour les erreurs dans le plan et dans l'espace (Ann. de l'Ec. pol. de Delft. T. III, 1887).

E. Czuber. Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte. 1884.

Karl Pearson. Mathematical Contributions to the Theory of Evolution (Philos. Trans. London. Vol. 187 A, 1896).

G. Udny Yule. An Introduction to the Theory of Statistics. 1912.

Е. Слуцкій. Теорія корреляціи и элементы ученія о кривыхъ распредѣленія. Кіевъ. 1912.

ГЛАВА VI.

Вѣроятности гипотезъ и будущихъ событій.

§ 35. Въ этой главѣ мы займемся разсмотрѣніемъ ряда вопросовъ объ измѣненіи вѣроятности съ измѣненіемъ данныхъ. Наши выводы будутъ основаны на слѣдующей теоремѣ, которая представляетъ прямое слѣдствіе теоремы умноженія вѣроятностей и можетъ быть названа *теоремой дѣленія* вѣроятностей.

Теорема. *Вѣроятность событія B, когда извѣстно существованіе событія A, равна отношенію вѣроятности появленія обоихъ событій A и B, вмѣстѣ, къ вѣроятности событія A.*

Эта теорема выражается формулою

$$(B, A) = \frac{(AB)}{(A)}, \tag{14}$$

которая вытекаетъ изъ установленнаго ранѣе равенства

$$(AB) = (A)(B, A).$$

Теорему дѣленія вѣроятностей мы примѣнимъ прежде всего къ рѣшенію такой задачи.

Задача 1[ая]. *Пусть, при существованіи событія A, событія*

$$B_1, B_2, \ldots, B_i, \ldots, B_n$$

единственно возможны и несовмѣстимы. Пусть далѣе

$$(B_1), (B_2), \ldots, (B_i), \ldots, (B_n)$$

означаютъ ихъ вѣроятности, пока существованіе или несуществованіе событія A остается неизвѣстнымъ; а символъ

$$(A, B_i)$$

означаетъ вѣроятность событія A, когда установлено существованіе событія B_i; пусть наконецъ символъ

$$(B_i, A)$$

означаетъ вѣроятность событія B_i, когда установлено уже существованіе событія A. По даннымъ

$$(B_1), (B_2), \ldots, (B_n),$$

$$(A, B_1), (A, B_2), \ldots, (A, B_n)$$

требуется вычислить

$$(B_1, A), (B_2, A), \ldots, (B_n, A).$$

Рѣшеніе. Согласно теоремѣ дѣленія вѣроятностей имѣемъ

$$(B_i, A) = \frac{(AB_i)}{(A)}.$$

Съ другой стороны, по теоремѣ умноженія вѣроятностей находимъ

$$(AB_i) = (B_i)(A, B_i).$$

Разбивая наконецъ событіе A на виды

$$AB_1, AB_2 \ldots, AB_n,$$

въ силу теоремы сложенія вѣроятностей получаемъ

$$(A) = (AB_1) + (AB_2) + \ldots + (AB_n).$$

Слѣдовательно имѣемъ

$$(A) = (B_1)(A, B_1) + (B_2)(A, B_2) + \ldots + (B_n)(A, B_n)$$

и наконецъ

$$(15) \qquad (B_i, A) = \frac{(B_i)(A, B_i)}{(B_1)(A, B_1) + (B_2)(A, B_2) + \ldots + (B_n)(A, B_n)}.$$

Разсматривая событія

$$B_1, B_2, \ldots, B_n$$

какъ гипотезы, придуманныя для объясненія появившагося событія A, мы можемъ назвать послѣднюю формулу, въ отличіе отъ другихъ, *формулою для опредѣленія вѣроятностей гипотезъ*. Она извѣстна также подъ именемъ *формулы Байеса*.

Присоединимъ теперь къ событіямъ

$$A, B_1, B_2, \ldots, B_n$$

новое событіе C и поставимъ слѣдующую задачу.

Задача 2^{ая}. По даннымъ

$$(B_1), (B_2), \ldots, (B_n),$$
$$(A, B_1), (A, B_2), \ldots, (A, B_n),$$
$$(C, AB_1), (C, AB_2), \ldots, (C, AB_n)$$

найти (C, A), т. е. опредѣлить вѣроятность событія C, когда существованіе событія A установлено.

Рѣшеніе. По условіямъ вопроса, событія

$$B_1, B_2, \ldots, B_n$$

должны быть единственно возможными и несовмѣстимыми при существованіи событія A. Поэтому при существованіи событія A мы можемъ разбить событіе C на несовмѣстимые виды

$$CB_1, CB_2, \ldots, CB_n$$

и въ силу теоремы сложенія вѣроятностей имѣемъ

$$(C, A) = (CB_1, A) + (CB_2, A) + \ldots + (CB_n, A).$$

Примѣняя затѣмъ къ слагаемымъ послѣдней суммы теорему умноженія вѣроятностей, получаемъ

$$(CB_i, A) = (B_i, A)(C, AB_i);$$

наконецъ для выраженія (B_i, A) нами была уже установлена формула

$$(B_i, A) = \frac{(B_i)(A, B_i)}{(B_1)(A, B_1) + \ldots + (B_n)(A, B_n)},$$

которая рѣшаетъ предыдущую задачу. Слѣдовательно

$$(CB_i, A) = \frac{(B_i)(A, B_i)(C, AB_i)}{(B_1)(A, B_1) + \ldots + (B_n)(A, B_n)}$$

и

$$(16)\qquad (C, A) = \frac{(B_1)(A, B_1)(C, AB_1) + \ldots + (B_n)(A, B_n)(C, AB_n)}{(B_1)(A, B_1) + \ldots + (B_n)(A, B_n)}.$$

Разсматривая событіе A какъ случившееся, а C какъ возможное будущее событіе, мы можемъ назвать послѣднюю формулу, въ отличіе отъ другихъ, *формулою для выраженія вѣроятностей будущихъ событій*.

Важно отмѣтить одно упрощеніе этой формулы. Событія C и A, конечно, предполагаются зависящими другъ отъ друга, но они могутъ становиться независимыми по выясненіи, какое именно изъ событій

$$B_1, B_2, \ldots, B_n$$

имѣетъ мѣсто. Если событія C и A не зависятъ другъ отъ друга, когда выяснено, какое именно изъ событій

$$B_1, B_2, \ldots, B_n$$

имѣетъ мѣсто, то каждая изъ вѣроятностей

$$(C, AB_i),$$

которыя входятъ въ разсматриваемую нами формулу, совпадаетъ съ соотвѣтствующею вѣроятностью

$$(C, B_i)$$

быть событію C при существованіи B_i. Тогда найденная выше формула принимаетъ болѣе простой видъ

$$(17)\qquad (C, A) = \frac{(B_1)(A, B_1)(C, B_1) + \ldots + (B_n)(A, B_n)(C, B_n)}{(B_1)(A, B_1) + \ldots + (B_n)(A, B_n)}.$$

Для поясненія установленныхъ формулъ разсмотримъ рядъ простыхъ частныхъ примѣровъ.

Первый примѣръ. Взятъ одинъ изъ 14 сосудовъ, о которыхъ извѣстно, что 9 изъ нихъ содержатъ по 5 бѣлыхъ и по 8 черныхъ шаровъ, а остальные 5 содержатъ по 11 бѣлыхъ и по 2 черныхъ шара, и что ни одинъ изъ нихъ не содержитъ иныхъ шаровъ кромѣ бѣлыхъ и черныхъ. Изъ этого сосуда вынутъ одинъ шаръ и оказался бѣлымъ.

Спрашивается, какъ велика, при такихъ данныхъ, вѣроятность, что взятъ былъ одинъ изъ девяти сосудовъ, содержащихъ по 5 бѣлыхъ и по 8 черныхъ шаровъ?

Затѣмъ требуется опредѣлить вѣроятность, что второй шаръ, вынутый изъ того же сосуда, будетъ также бѣлымъ.

Примѣненіе формулъ. Пусть событіе B_1 состоитъ въ томъ, что взятый сосудъ содержалъ 5 бѣлыхъ и 8 черныхъ шаровъ, а событіе B_2 въ томъ, что взятый сосудъ содержалъ 11 бѣлыхъ и 2 черныхъ шара. Пусть далѣе событіе A состоитъ въ бѣломъ цвѣтѣ перваго вынутаго шара, а событіе C въ бѣломъ цвѣтѣ втораго вынутаго шара. Тогда, придерживаясь установленныхъ обозначеній, имѣемъ

$$(B_1)=\frac{9}{14},\ (B_2)=\frac{5}{14},$$

$$(A, B_1)=\frac{5}{13},\ (A, B_2)=\frac{11}{13},$$

а искомыми величинами будутъ

$$(B_1, A) \text{ и } (C, A).$$

Первая изъ нихъ представляетъ вѣроятность, что бѣлый шаръ былъ вынутъ изъ сосуда, содержащаго 9 бѣлыхъ и 5 черныхъ шаровъ.

Опредѣляя ее по вышеуказанной формулѣ, находимъ

$$(B_1, A)=\frac{\frac{9}{14}\cdot\frac{5}{13}}{\frac{9}{14}\cdot\frac{5}{13}+\frac{5}{14}\cdot\frac{11}{13}}=\frac{9}{20};$$

подобнымъ же образомъ получимъ

$$(B_2, A)=\frac{\frac{5}{14}\cdot\frac{11}{13}}{\frac{9}{14}\cdot\frac{5}{13}+\frac{5}{14}\cdot\frac{11}{13}}=\frac{11}{20}.$$

Интересно замѣтить, что

$$(B_1)>(B_2), \text{ а } (B_1, A)<(B_2, A).$$

Переходимъ къ величинѣ

$$(C, A),$$

которая представляетъ вѣроятность, что второй вынутый шаръ будетъ бѣлымъ, какъ и первый. Для вычисленія ея по формулѣ

$$(C, A) = \frac{(B_1)(A, B_1)(C, AB_1) + (B_2)(A, B_2)(C, AB_2)}{(B_1)(A, B_1) + (B_2)(A, B_2)}$$

мы должны установить величины

$$(C, AB_1) \text{ и } (C, AB_2).$$

Величина

$$(C, AB_1)$$

представляетъ вѣроятность вынуть послѣ одного бѣлаго шара второй бѣлый шаръ изъ сосуда, который до начала этихъ выниманій содержалъ 5 бѣлыхъ и 8 черныхъ шаровъ.

Предполагая, что первый вынутый шаръ не былъ возвращенъ назадъ въ сосудъ, имѣемъ

$$(C, AB_1) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3},$$

такъ какъ второй вынутый шаръ долженъ принадлежать къ числу двѣнадцати шаровъ, среди которыхъ 4 бѣлыхъ и 8 черныхъ. На подобныхъ же основаніяхъ имѣемъ

$$(C, AB_2) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

Слѣдовательно

$$(C, A) = \frac{\frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12} + \frac{5}{14} \cdot \frac{11}{13} \cdot \frac{10}{12}}{\frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} + \frac{5}{14} \cdot \frac{11}{13}} = \frac{73}{120};$$

такъ опредѣляется вѣроятность бѣлаго цвѣта втораго шара, когда извѣстенъ бѣлый цвѣтъ перваго шара.

До тѣхъ же поръ, пока цвѣтъ перваго шара остается не опредѣленнымъ, вѣроятность бѣлаго цвѣта второго шара равна

$$(C) = (A) = \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} + \frac{5}{14} \cdot \frac{11}{13} = \frac{100}{182} = \frac{50}{91}.$$

Второй примѣръ. Изъ сосуда, содержащаго 3 бѣлыхъ и 5 черныхъ шаровъ и не содержащаго никакихъ другихъ шаровъ, вынуто и переложено въ другой пустой сосудъ четыре шара. Затѣмъ изъ этого второго сосуда, содержащаго только четыре

шара перваго сосуда, вынуто два шара, которые оказались оба бѣлыми. Наконецъ изъ того же втораго сосуда вынутъ еще одинъ шаръ.

Спрашивается, какъ велика вѣроятность, что этотъ послѣдній шаръ также бѣлый?

Примѣненіе формулъ. Зная, что изъ второго сосуда вынуто два бѣлыхъ шара, мы можемъ относительно цвѣта шаровъ, переложенныхъ изъ перваго сосуда во второй, сдѣлать двѣ гипотезы: 1) два бѣлыхъ и два черныхъ, 2) три бѣлыхъ и одинъ черный.

Назвавъ эти гипотезы событіями

$$B_1 \text{ и } B_2,$$

бѣлый цвѣтъ вынутыхъ двухъ шаровъ событіемъ A и бѣлый цвѣтъ послѣдняго шара событіемъ C, имѣемъ (см. § 21)

$$(B_1) = \frac{1.2.3.4}{1.2.1.2} \cdot \frac{3.2.5.4}{8.7.6.5} = \frac{3}{7},$$

$$(B_2) = \frac{1.2.3.4}{1.2.3.1} \cdot \frac{3.2.1.5}{8.7.6.5} = \frac{1}{14},$$

$$(A, B_1) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad (A, B_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2},$$

$$(C, AB_1) = 0, \quad (C, AB_2) = \frac{1}{2};$$

и потому искомая вѣроятность равна

$$\frac{\frac{1}{14} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{6}.$$

Этотъ выводъ вполнѣ согласенъ съ тѣмъ обстоятельствомъ, что разсматриваемый шаръ долженъ принадлежать къ числу шести шаровъ, среди которыхъ находится только одинъ бѣлый.

Третій примѣръ. Оставимъ всѣ условія и обозначенія втораго примѣра съ тою только разницею, что послѣдній шаръ, неизвѣстнаго цвѣта, будемъ считать вынутымъ не изъ втораго сосуда, а изъ перваго.

При такомъ предположеніи имѣемъ

$$(C, AB_1) = \frac{1}{4} = (C, B_1), \quad (C, AB_2) = (C, B_2) = 0$$

и потому вѣроятность, что послѣдній шаръ бѣлый, равна

$$\frac{\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{6},$$

какъ и должно быть, такъ какъ и этотъ шаръ принадлежитъ къ числу шести шаровъ, среди которыхъ находится только одинъ бѣлый.

Четвертый примѣръ. Имѣемъ два сосуда L и M; сосудъ L содержитъ три шара, изъ которыхъ одинъ черный и два бѣлыхъ, а сосудъ M содержитъ шесть шаровъ, изъ которыхъ одинъ бѣлый и пять черныхъ. Переложивъ изъ L въ M одинъ шаръ и вынувъ затѣмъ изъ M одинъ шаръ, мы замѣтили, что этотъ послѣдній шаръ бѣлаго цвѣта.

При такихъ условіяхъ требуется опредѣлить вѣроятность, что шаръ, переложенный изъ L въ M, былъ чернаго цвѣта.

Отвѣтъ. Искомая вѣроятность равна

$$\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}}=\frac{1}{5}.$$

§ 36. Воспользуемся установленными формулами для рѣшенія двухъ задачъ, предѣльный случай которыхъ, при одномъ частномъ предположеніи, встрѣчаетъ практическія примѣненія.

Задача 3ъя. Разсматривается неограниченный рядъ испытаній при нижеуказанныхъ данныхъ. По выясненіи нѣкоторыхъ обстоятельствъ эти испытанія становятся, относительно событія E, независимыми другъ отъ друга, и для всѣхъ ихъ вѣроятность событія E становится равною одному и тому же числу α. Вышеупомянутыя обстоятельства не выяснены и число α остается не вполнѣ извѣстнымъ. Относительно величины α можно сдѣлать n, и только n, предположеній:

$$\alpha=\alpha_1,\ \alpha=\alpha_2,\ldots,\ \alpha=\alpha_i,\ldots,\ \alpha=\alpha_n,$$

вѣроятности которыхъ, соотвѣтственно имѣющимся даннымъ,

представляются числами

$$p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_n.$$

Требуется опредѣлить, какъ измѣнятся вѣроятности различныхъ предположеній о величинѣ α въ томъ случаѣ, когда сверхъ данныхъ, по которымъ установлены эти выраженія

$$p_1, p_2, \ldots, p_n,$$

будетъ извѣстно, что при $m+l$ испытаніяхъ событіе E появилось m разъ и противоположное ему l разъ.

Иначе сказать, по даннымъ

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n,$$

$$p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_n,$$

требуется вычислить вѣроятность каждаго изъ предположеній

$$\alpha = \alpha_1, \alpha = \alpha_2, \ldots, \alpha = \alpha_n$$

послѣ того, какъ будетъ извѣстно, что при $m+l$ испытаніяхъ событіе E появилось ровно m разъ.

Рѣшеніе. Обозначимъ буквою A наблюденный результатъ $m+l$ испытаній, состоящій въ появленіи m разъ событія E и l разъ противоположнаго событія. Затѣмъ вышеуказанныя предположенія о величинѣ числа α назовемъ событіями

$$B_1, B_2, \ldots, B_n;$$

такъ что событіе B_i, по существу дѣла, равносильно равенству

$$\alpha = \alpha_i.$$

Тогда искомыми величинами будутъ

$$(B_1, A), (B_2, A), \ldots, (B_n, A),$$

вѣроятности событій

$$B_1, B_2, \ldots, B_n$$

при существованіи A. Чтобы воспользоваться для опредѣленія этихъ вѣроятностей формулою

$$(B_i, A) = \frac{(B_i)(A, B_i)}{(B_1)(A, B_1) + \ldots + (B_n)(A, B_n)},$$

надо найти только значенія

$$(A, B_1), (A, B_2), \ldots, (A, B_n),$$

такъ какъ числа

$$(B_1) = p_1, (B_2) = p_2, \ldots, (B_n) = p_n$$

даны.

Обращаясь къ вычисленію

$$(A, B_1), (A, B_2), \ldots, (A, B_n),$$

замѣчаемъ, что

$$(A, B_i)$$

представляетъ вѣроятность появленія событія E ровно m разъ при $m+l$ независимыхъ испытаніяхъ, для каждаго изъ которыхъ вѣроятность событія E равна α_i. Подобная вѣроятность находится по извѣстной формулѣ, въ силу которой имѣемъ

$$(A, B_i) = \frac{1.2\ldots(m+l)}{1.2\ldots m.1.2\ldots l} \alpha_i^m (1-\alpha_i)^l.$$

Полагая i послѣдовательно равнымъ

$$1, 2, \ldots, n,$$

находимъ такимъ образомъ величины

$$(A, B_1), (A, B_2), \ldots, (A, B_n).$$

Остается только подставить эти величины въ указанную выше формулу и по сокращеніи на

$$\frac{1\,2\ldots(m+l)}{1.2\ldots m.1.2\ldots l}$$

получимъ

$$(B_i, A) = \frac{p_i \alpha_i^m (1-\alpha_i)^l}{p_1 \alpha_1^m (1-\alpha_1)^l + p_2 \alpha_2^m (1-\alpha_2)^l + \ldots + p_n \alpha_n^m (1-\alpha_n)^l}.$$

Найдя вѣроятность каждаго значенія числа α въ отдѣльности, мы легко можемъ опредѣлить и вѣроятность, что α лежитъ въ заданныхъ предѣлахъ, такъ какъ послѣдняя вѣроятность равна суммѣ вѣроятностей тѣхъ значеній числа α, которыя лежатъ въ заданныхъ предѣлахъ. Слѣдовательно, послѣ того какъ стало извѣстнымъ, что при $m+l$ испытаніяхъ событіе E слу-

чилось ровно m разъ, вѣроятность неравенствъ

$$\alpha' < \alpha < \alpha''$$

выражается дробью

$$\frac{\Sigma' p_i \alpha_i^m (1-\alpha_i)^l}{\Sigma p_i \alpha_i^m (1-\alpha_i)^l},$$

гдѣ сумма Σ распространяется на всѣ возможныя значенія i, сумма же Σ' только на тѣ, при которыхъ выполняются неравенства

$$\alpha' < \alpha_i < \alpha''.$$

Задача 4ая. При сохраненіи всѣхъ условій и данныхъ третьей задачи, требуется вычислить вѣроятность, что въ $m_1 + l_1$ будущихъ испытаній, изъ разсматриваемаго нами ряда, событіе E появится ровно m_1 разъ, когда извѣстно, что въ $m + l$ испытаній оно появилось ровно m разъ.

Примѣчаніе. Мы назвали $m_1 + l_1$ испытаній будущими для отличія ихъ отъ наблюденныхъ; но въ нашихъ выводахъ время не играетъ никакой роли, и потому эти $m_1 + l_1$ испытаній могутъ быть также прошедшими или современными.

Рѣшеніе. Если буквою C обозначить появленіе событія E ровно m_1 разъ при $m_1 + l_1$ испытаніяхъ, то искомая нами вѣроятность, согласно принятымъ обозначеніямъ, будетъ

$$(C, A)$$

и опредѣлится по формулѣ

$$(C, A) = \frac{\Sigma (B_i)(A, B_i)(C, B_i)}{\Sigma (B_i)(A, B_i)},$$

при

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$(B_i) = p_i; \ (A, B_i) = \frac{1.2\ldots(m+l)}{1.2\ldots m.1.2\ldots l} \alpha_i^m (1-\alpha_i)^l$$

и наконецъ

$$(C, B_i) = \frac{1.2\ldots(m_1+l_1)}{1.2\ldots m_1.1.2\ldots l_1} \alpha_i^{m_1} (1-\alpha_i)^{l_1};$$

ибо (C, B_i) отличается отъ (A, B_i) только числами m_1 и l_1, замѣняющими соотвѣтственно m и l. Подставляя эти выраженія

$$(B_i),\ (A, B_i) \text{ и } (C, B_i)$$

въ приведенную выше формулу, по сокращеніи на

$$\frac{1.2\ldots.(m+l)}{1.2\ldots.m.1.2\ldots.l},$$

получаемъ

$$(C,A)=\frac{1.2\ldots.(m_1+l_1)}{1.2\ldots.m_1.1.2\ldots.l_1}\frac{\Sigma p_i\alpha_i^{m+m_1}(1-\alpha_i)^{l+l_1}}{\Sigma p_i\,\alpha_i^m(1-\alpha_i)^l};$$

такъ опредѣляется вѣроятность (C,A) событію E появиться въ m_1+l_1 испытаній ровно m_1 разъ, когда извѣстно, что въ $m+l$ испытаній это событіе появилось ровно m разъ.

Для лучшаго выясненія послѣднихъ двухъ задачъ можетъ служить слѣдующій частный ихъ случай. Имѣемъ n категорій сосудовъ съ бѣлыми и иными шарами. Отношеніе числа бѣлыхъ шаровъ къ числу всѣхъ шаровъ, находящихся въ сосудѣ, равно α_1 для каждаго сосуда первой категоріи, равно α_2 для каждаго сосуда второй категоріи и т. д. Пусть наконецъ числа

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

представляютъ соотвѣтственно отношенія числа сосудовъ категорій

$$1^{\text{ой}}, 2^{\text{ой}}, \ldots, n^{\text{ой}}$$

къ числу всѣхъ сосудовъ.

Всѣ эти сосуды перемѣшаны и изъ нихъ взятъ наудачу одинъ, съ которымъ и производится рядъ испытаній. Каждое испытаніе состоитъ въ извлеченіи одного шара, который затѣмъ возвращается обратно въ сосудъ для поддержанія постояннаго отношенія числа бѣлыхъ шаровъ къ числу всѣхъ шаровъ сосуда.

При $m+l$ такихъ испытаній бѣлый шаръ появился ровно m разъ. Требуется опредѣлить вѣроятность, что для испытуемаго сосуда отношеніе числа содержащихся въ немъ бѣлыхъ шаровъ къ числу всѣхъ его шаровъ имѣетъ данное значеніе α_i.

До наблюденія эта вѣроятность равна p_i; послѣ же наблюденія она выражается, согласно формулѣ, дробью

$$\frac{p_i\,\alpha_i^m(1-\alpha_i)^l}{p_1\,\alpha_1^m(1-\alpha_1)^l+p_2\,\alpha_2^m(1-\alpha_2)^l+\ldots+p_n\,\alpha_n^m(1-\alpha_n)^l}.$$

Затѣмъ требуется опредѣлить вѣроятность, что при m_1+l_1

испытаніяхъ, произведенныхъ съ тѣмъ же сосудомъ послѣ наблюденныхъ $m+l$ испытаній, бѣлый шаръ появится равно m_1 разъ. Если бы результатъ наблюденныхъ $m+l$ испытаній не былъ извѣстенъ, то эта послѣдняя вѣроятность выражалась бы суммою

$$\sum \frac{1.2 \ldots .(m_1+l_1)}{1.2 \ldots . m_1 . 1.2 \ldots . l_1} p_i \alpha_i^{m_1} (1-\alpha_i)^{l_1},$$

гдѣ

$$i = 1, 2, \ldots . n;$$

при извѣстности же результата $m+l$ испытаній она, согласно формулѣ, равна

$$\frac{1.2 \ldots (m_1+l_1)}{1.2 \ldots . m_1 . 1.2 \ldots . l_1} \frac{\Sigma p_i \alpha_i^{m+m_1} (1-\alpha_i)^{l+l_1}}{\Sigma p_i \alpha_i^m (1-\alpha_i)^l},$$

гдѣ

$$i = 1, 2, \ldots . n.$$

Переходя къ упомянутому выше предѣльному случаю, положимъ

$$p_1 = p_2 = \ldots . = p_n = \frac{1}{n},$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{n}, \ \alpha_2 = \frac{2}{n}, \ldots ., \ \alpha_i = \frac{i}{n}, \ldots ., \ \alpha_n = 1$$

и будемъ увеличивать n безпредѣльно.

Тогда разсматриваемыя нами суммы

$$\Sigma' p_i \alpha_i^m (1-\alpha_i)^l, \ \Sigma p_i \alpha_i^m (1-\alpha_i)^l,$$
$$\Sigma p_i \alpha_i^{m+m_1} (1-\alpha_i)^{l+l_1}$$

будутъ стремиться, какъ нетрудно видѣть, къ предѣламъ

$$\int_{\alpha'}^{\alpha''} \alpha^m (1-\alpha)^l d\alpha, \ \int_0^1 \alpha^m (1-\alpha)^l d\alpha,$$
$$\int_0^1 \alpha^{m+m_1} (1-\alpha)^{l+l_1} d\alpha.$$

Выводы, къ которымъ мы приходимъ такимъ образомъ, заключаются въ рѣшеніи задачъ 5ой и 6ой.

Задача 5ая. Разсматривается неограниченный рядъ испытаній, относительно которыхъ извѣстно, что по выясненіи нѣкоторыхъ обстоятельствъ они становятся независимыми

другъ отъ друга. Далѣе предполагается извѣстнымъ, что вѣроятность событія E при всѣхъ этихъ испытаніяхъ должна имѣть одну и ту же величину α, если только будутъ выяснены вышеупомянутыя обстоятельства. Но эти обстоятельства остаются невыясненными, и потому число α остается неизвѣстнымъ и всѣ возможныя для него значенія, между 0 и 1, представляются равновозможными; такъ что вѣроятность неравенствъ

$$\alpha' < \alpha < \alpha'',$$

при $0 < \alpha' < \alpha'' < 1$, *выражается интеграломъ*

$$\int_{\alpha'}^{\alpha''} d\alpha = \alpha'' - \alpha'.$$

Спрашивается, какъ измѣнятся вѣроятности различныхъ предположеній о величинѣ α въ томъ случаѣ, когда будетъ извѣстно, что при $m + l$ испытаніяхъ событіе E появилось m разъ, а противоположное ему l разъ?

Отвѣтъ. Вѣроятность неравенствъ

$$\alpha' < \alpha < \alpha''$$

будетъ выражаться дробью

$$\frac{\int_{\alpha'}^{\alpha''} \alpha^m (1-\alpha)^l \, d\alpha}{\int_0^1 \alpha^m (1-\alpha)^l \, d\alpha}; \tag{18}$$

иначе сказать, плотность вѣроятности для различныхъ значеній α будетъ пропорціональна произведенію

$$\alpha^m (1-\alpha)^l.$$

Задача 6ая. При сохраненіи всѣхъ условій и данныхъ предъидущей задачи, требуется найти вѣроятность, что въ $m_1 + l_1$ будущихъ испытаній, изъ разсматриваемаго нами ряда, событіе E появится ровно m_1 разъ, когда извѣстно, что въ $m + l$ испытаній оно появилось ровно m разъ.

Отвѣтъ.

Искомая вѣроятность равна

$$(19)\qquad \frac{1.2.3\ldots(m_1+l_1)}{1.2\ldots m_1.1.2\ldots l_1}\cdot\frac{\int_0^1\alpha^{m+m_1}(1-\alpha)^{l+l_1}d\alpha}{\int_0^1\alpha^{m}(1-\alpha)^{l}d\alpha}.$$

Послѣднія двѣ задачи отлично иллюстрируются посредствомъ неисчерпаемаго сосуда, въ которомъ находятся шары бѣлаго и иного цвѣта, при чемъ отношеніе числа бѣлыхъ шаровъ къ числу всѣхъ шаровъ сохраняетъ неизвѣстную намъ постоянную величину, сколько бы шаровъ мы ни вынули изъ сосуда.

Формулы, представляющія отвѣтъ на задачи 5ую и 6ую, примѣняются къ опредѣленію вѣроятностей по наблюденіямъ, a posteriori. При этомъ, изъ выраженія вѣроятности неравенствъ

$$\alpha' < \alpha < \alpha''$$

въ видѣ отношенія

$$\frac{\int_{\alpha'}^{\alpha''}\alpha^m(1-\alpha)^l d\alpha}{\int_0^1\alpha^m(1-\alpha)^l d\alpha}$$

можно заключить о малой вѣроятности большихъ отклоненій α отъ $\frac{m}{m+l}$, если число наблюденныхъ испытаній $m+l$ значительно; и потому можно положить

$$\alpha \doteq \frac{m}{m+l}.$$

Затѣмъ изъ отвѣта на шестую задачу можно вывесть, что при большомъ числѣ наблюденныхъ испытаній и сравнительно маломъ числѣ будущихъ испытаній вѣроятности различныхъ предположеній о числѣ появленій событія E, при этихъ послѣднихъ испытаніяхъ, мало отличаются отъ тѣхъ, которыя получатся, если при всѣхъ будущихъ испытаніяхъ мы будемъ считать вѣроятность событія E равною

$$\frac{m}{m+l}.$$

Напримѣръ, для одного будущаго испытанія вѣроятность по-

явленія событія E равна

$$\frac{m+1}{m+l+2} \neq \frac{m}{m+l};$$

а для двухъ будущихъ испытаній вѣроятность появленія событія E два раза равна

$$\frac{(m+1)(m+2)}{(m+l+2)(m+l+3)} \neq \left(\frac{m}{m+l}\right)^2$$

и вѣроятность появленія его только одинъ разъ равна

$$2\frac{(m+1)(l+1)}{(m+l+2)(m+l+3)} \neq 2\frac{m}{m+l} \cdot \frac{l}{m+l}.$$

Изъ формулъ (18) и (19) можно, при помощи формулы Стирлинга и измѣненія подъинтегральной функціи, вывесть приближенныя формулы, подобныя формулѣ (6), на чемъ однако мы не остановимся.

Относительно всѣхъ выводовъ, основанныхъ на указанномъ нами примѣненіи формулъ (18) и (19), слѣдуетъ замѣтить, что имъ нельзя придавать большого значенія. Дѣло въ томъ, что прежде, чѣмъ примѣнять ту или другую формулу и дѣлать изъ нея различные выводы, необходимо выяснить условія ея существованія и убѣдиться, можно ли считать ихъ выполненными въ тѣхъ случаяхъ, къ которымъ мы желаемъ примѣнять формулу.

Формулы, представляющія отвѣтъ на задачи 5[ую] и 6[ую], обставлены слѣдующими условіями:

1) *независимость испытаній, по выясненіи нѣкоторыхъ обстоятельствъ;*

2) *постоянство неизвѣстной намъ вѣроятности событія E по выясненіи выше упомянутыхъ обстоятельствъ;*

3) *равновозможность всѣхъ значеній этой вѣроятности, до наблюденія.*

Примѣняются же эти формулы въ такихъ случаяхъ, гдѣ о выполненіи указанныхъ условій едва ли можно говорить.

Одинъ изъ важныхъ примѣровъ вѣроятностей, опредѣляемыхъ по наблюденіямъ, представляетъ вѣроятность лицу даннаго возраста прожить данный срокъ, напримѣръ одинъ годъ. Объ

этой вѣроятности говорятъ очень часто въ виду важныхъ ея приложеній. Многіе занимались разработкою пріемовъ приближеннаго вычисленія ея на основаніи наблюденій и составили различныя таблицы смертности, изъ которыхъ нетрудно вывесть ея приближенную величину для различныхъ возрастовъ и сроковъ.

Мы не станемъ разбирать подробностей и тонкостей этихъ пріемовъ, а остановимся только на выясненіи ихъ основаній.

Положимъ, что n лицъ, имѣющихъ одинъ и тотъ же данный возрастъ, поступили подъ наше наблюденіе и что мы не теряли ихъ изъ вида въ теченіе даннаго срока. Положимъ далѣе, что m изъ нихъ прожили данный срокъ, а $n - m$ умерли въ теченіе его. Тогда, разсматривая безразлично одно изъ этихъ лицъ, мы можемъ дробь

$$\frac{m}{n}$$

назвать вѣроятностью прожить данный срокъ лицу даннаго возраста, взятому изъ числа вышеуказанныхъ n лицъ.

Установленная такимъ образомъ вѣроятность относится только къ прошедшему времени и къ данной группѣ лицъ; но практическія цѣли заставляютъ насъ переносить выводы прошлаго на будущее. Такой переносъ оправдывается предположеніемъ, что для другой группы людей, болѣе или менѣе похожей на прежнюю, отношеніе аналогичное дроби $\frac{m}{n}$ будетъ мало отличаться отъ $\frac{m}{n}$; а это предположеніе основывается на замѣченномъ съ давнихъ временъ повтореніи различныхъ явленій, изъ котораго вытекаетъ представленіе о неизмѣнныхъ законахъ природы.

Примѣняя затѣмъ къ данному случаю задачи 5[ую] и 6[ую], мы должны вообразить или предположить, что существуетъ какая то неизвѣстная величина

$$\alpha,$$

которая представляетъ вѣроятность лицу даннаго возраста прожить данный срокъ и приближенно равна

$$\frac{m}{n}.$$

Но нѣтъ никакихъ средствъ убѣдиться въ правильности такого предположенія и ихъ нельзя, конечно, извлечь изъ формулъ (18) и (19), основанныхъ на томъ же предположеніи. Напротивъ, при всей вѣрѣ въ существованіе неизмѣнныхъ законовъ природы, мы имѣемъ основанія отрицать существованіе постояннаго числа α, такъ какъ съ теченіемъ времени условія жизни людей могутъ измѣняться весьма значительно, а при измѣненіи условій жизни едва ли можетъ оставаться неизмѣнною смертность*) людей. Сверхъ того весьма естественно предположеніе о различной смертности различныхъ категорій людей, одновременно обитающихъ на землѣ, но отличающихся другъ отъ друга мѣстомъ жительства, родомъ занятій, тѣлосложеніемъ и т. д.

Поэтому, если допустить, что постоянное число α опредѣляется общими условіями жизни всѣхъ людей, то опредѣленіе такого числа по наблюденіямъ надъ одной группой лицъ трудно признать правильнымъ, какими бы формулами ни подкрѣплялось это опредѣленіе, такъ какъ должны проявиться индивидуальныя особенности группы. Указанное обстоятельство не устранится и въ томъ случаѣ, если мы будемъ разсматривать не совокупность всѣхъ людей вообще, а нѣкоторую часть ея, при чемъ встрѣтится еще новое затрудненіе, состоящее въ необходимости точно опредѣлить разсматриваемую часть.

Итакъ, признавая пользу таблицъ смертности для практическихъ цѣлей, мы считаемъ невозможнымъ доказывать законность ихъ примѣненій ссылками на вышеприведенныя формулы исчисленія вѣроятностей.

§ 37. Въ заключеніе главы остановимся на вопросѣ о вѣроятности свидѣтельскихъ показаній, къ которому также можно приложить формулу Байеса. Съ практической точки зрѣнія этотъ вопросъ можетъ представляться весьма важнымъ; но значеніе его рѣшенія сильно уменьшается необходимостью многихъ произвольныхъ предположеній.

---

*) Мы пользуемся этимъ словомъ какъ общеупотребительнымъ, не останавливаясь на вопросѣ, можно ли ему придать вполнѣ опредѣленный смыслъ.

Для упрощенія вопроса мы будемъ считать всѣхъ свидѣтелей вполнѣ освѣдомленными о предметѣ ихъ показанія, но способными сообщать завѣдомо ложныя свѣдѣнія; а показанія ихъ будемъ считать независимыми другъ отъ друга и согласными. Всѣмъ свидѣтелямъ мы припишемъ одинаковую склонность къ правдѣ и будемъ измѣрять ее какимъ нибудь числомъ α, лежащимъ между нулемъ и единицей; число α мы будемъ разсматривать какъ вѣроятность, что свидѣтель говоритъ правду, и соотвѣтственно этому разность $1 - \alpha$ будетъ представлять вѣроятность, что свидѣтель говоритъ неправду.

Число свидѣтелей обозначимъ буквою n.

Положимъ, что согласныя ихъ показанія относятся къ извѣстному всѣмъ имъ результату испытанія; пусть, именно, всѣ n свидѣтелей заявляютъ, что при испытаніи появилось событіе E, вѣроятность котораго до свидѣтельскихъ показаній равна p.

Наконецъ мы введемъ еще величину β, которая будетъ выражать вѣроятность для свидѣтеля, говорящаго неправду, остановиться именно на событіи E, а не на какомъ нибудь другомъ возможномъ результатѣ того же испытанія.

При такихъ условіяхъ мы выразимъ произведеніемъ

$$p\alpha^n$$

вѣроятность появленія событія E и согласнаго заявленія свидѣтелей объ этомъ появленіи, пока свидѣтели не высказались; при тѣхъ же условіяхъ вѣроятность непоявленія событія E и согласнаго заявленія свидѣтелей о его появленіи мы представимъ произведеніемъ

$$(1 - p)(1 - \alpha)^n \beta^n.$$

Соотвѣтственно этому сумма

$$p\alpha^n + (1 - p)(1 - \alpha)^n \beta^n$$

будетъ выражать вѣроятность согласнаго заявленія свидѣтелей о появленіи событія E, пока свидѣтели не высказались.

Отсюда, на основаніи формулы Байеса, мы заключаемъ, что

послѣ согласнаго показанія свидѣтелей вѣроятность появленія событія E становится равною

(20) $$\frac{p\alpha^n}{p\alpha^n + (1-p)(1-\alpha)^n \beta^n}.$$

Найденное простое выраженіе вѣроятности мы примѣнимъ къ одной интересной задачѣ, которую разсматривалъ Буняковскій въ вышеупомянутомъ сочиненіи «Основанія математической теоріи вѣроятностей».

Задача Буняковскаго. Изъ полной русской азбуки выдернули шесть буквъ наудачу, которыя по мѣрѣ ихъ вскрытія ставили одну возлѣ другой. Два очевидца утверждаютъ, что вынутыя буквы составили слово *Москва.* Спрашивается, какъ велика вѣроятность, что показаніе двухъ свидѣтелей справедливо?

При этомъ предполагается, что полная русская азбука содержитъ 36 буквъ и что склонность свидѣтелей къ правдѣ выражается дробью $\frac{9}{10}$.

Рѣшеніе. Обращаясь къ общему выраженію вѣроятности въ видѣ дроби

$$\frac{p\alpha^n}{p\alpha^n + (1-p)(1-\alpha)^n \beta^n},$$

замѣчаемъ, что въ данномъ случаѣ

$$n = 2,\ \alpha = \frac{9}{10}$$

и на основаніи теоремы умноженія вѣроятностей

$$p = \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{35}\cdot\frac{1}{34}\cdot\frac{1}{33}\cdot\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{31};$$

число же β остается неопредѣленнымъ.

Для устраненія неопредѣленности числа β обратимся къ предположенію, которое сдѣлано Буняковскимъ при рѣшеніи задачи.

Оно заключается въ томъ, что въ русскомъ языкѣ имѣется 50000 словъ, состоящихъ изъ шести различныхъ буквъ, и что при ложномъ показаніи свидѣтель долженъ остановиться на одномъ изъ этихъ словъ. Считая всѣ эти ложныя показанія равно-

возможными и, въ виду малости разности

$$\frac{1}{50000} - \frac{1}{49999},$$

не обращая вниманія на уменьшеніе числа ихъ на одну единицу въ случаѣ, когда вынутыя буквы составили одно изъ словъ, мы положимъ

$$\beta = \frac{1}{50000}.$$

При такихъ предположеніяхъ искомая вѣроятность выразится дробью

$$\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^2}{\left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 \frac{36.35.34.33.32.31 - 1}{(50000)^2}},$$

которая послѣ простыхъ сокращеній приводится къ

$$\frac{81 \times (625)^2}{81 \times (625)^2 + 219126,5\ldots} > 0,99;$$

а по вычисленіямъ Буняковскаго искомая вѣроятность близка къ

$$\frac{81}{28129}.$$

Разногласіе двухъ выводовъ, полученныхъ при однихъ и тѣхъ же предположеніяхъ, объясняется тѣмъ обстоятельствомъ, что Буняковскій свелъ единогласное показаніе свидѣтелей о появленіи опредѣленнаго слова *Москва* къ простому указанію каждаго изъ свидѣтелей на появленіе одного изъ словъ русскаго языка и соотвѣтственно этому выразилъ искомую вѣроятность дробью

$$\frac{p\alpha^2}{p\alpha^2 + (1-p)(1-\alpha)^2},$$

полагая

$$\alpha = \frac{9}{10} \text{ и } p = \frac{50000}{36.35.34.33.32.31}.$$

Принятая нами величина β едва ли не должна быть признана слишкомъ малою; ибо число русскихъ словъ, составленныхъ изъ шести различныхъ буквъ, конечно значительно меньше 50000, и кромѣ того естественно предполагать, что слово *Москва* можетъ быть выбрано для ложнаго показанія предпочтительно передъ

многими другими. Увеличивая въ виду этого обстоятельства число β, положимъ

$$\beta = \frac{1}{200};$$

тогда искомая нами вѣроятность, что показаніе двухъ свидѣтелей справедливо, выразится уже довольно малымъ числомъ

$$\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^2}{\left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 \frac{36.35.34.33.32.31 - 1}{(200)^2}} \mp \frac{81}{35141}.$$

Приведенный примѣръ, по нашему мнѣнію, достаточно выясняетъ неизбѣжность многихъ произвольныхъ предположеній при рѣшеніи вопросовъ подобныхъ разобранному нами, которые по существу дѣла имѣютъ весьма неопредѣленный характеръ.

Разсмотрѣнный вопросъ приметъ еще болѣе неопредѣленный характеръ, если допустимъ, что свидѣтели могутъ ошибаться и устранимъ независимость ихъ показаній.

Не составляя выраженія вѣроятности свидѣтельскихъ показаній при различныхъ предположеніяхъ, считаемъ нелишнимъ добавить къ вышесказанному только рядъ простыхъ замѣчаній.

Во первыхъ, если событіе невозможно, то никакія свидѣтельскія показанія не могутъ сообщить ему даже малой вѣроятности.

Мало вѣроятное событіе можетъ отъ согласныхъ показаній многихъ свидѣтелей превратиться въ весьма вѣроятное, если совпаденіе ложныхъ показаній представляется еще менѣе вѣроятнымъ. Но мало вѣроятное событіе не станетъ весьма вѣроятнымъ отъ согласнаго показанія такихъ свидѣтелей, которые сговорились другъ съ другомъ, или имѣютъ одинаковыя не вполнѣ точныя свѣдѣнія о предметѣ ихъ показаній. Какъ бы ни былъ добросовѣстенъ очевидецъ событія, но сомнѣніе въ томъ, что онъ способенъ былъ правильно понять совершившееся, можетъ, въ извѣстныхъ случаяхъ, лишить его показаніе всякаго значенія.

Наконецъ сообщеніе о событіи можетъ доходить къ намъ не отъ очевидцевъ, а черезъ послѣдовательный рядъ свидѣтелей, которые передаютъ то, что они слышали отъ другихъ. Въ этомъ

случаѣ удлинненіе цѣпи свидѣтелей, конечно, затемняетъ совершившееся. Независимо отъ математическихъ формулъ, на которыхъ мы не остановимся, не придавая имъ большого значенія, ясно, что къ разсказамъ о невѣроятныхъ событіяхъ, будто бы происшедшихъ въ давно минувшее время, слѣдуетъ относиться съ крайнимъ сомнѣніемъ.

И мы никакъ не можемъ согласиться съ Буняковскимъ, что необходимо выдѣлить извѣстный классъ разсказовъ, сомнѣваться въ которыхъ онъ считаетъ предосудительнымъ *).

Въ данномъ случаѣ мое разногласіе съ Буняковскимъ выходитъ уже изъ области математики и касается шаткой области желаній и личныхъ интересовъ людей. Не вдаваясь въ эту область, приведемъ здѣсь замѣчаніе Лапласа, по поводу одного парадокса Паскаля, которое можно найти въ статьѣ «De la probabilité des témoignages», помѣщенной во введеніи къ его классическому труду «Théorie analytique des probabilités». Тотъ, кто обѣщаетъ за довѣріе къ своимъ утвержденіямъ награду а за недовѣріе наказаціе, не увеличиваетъ такимъ обѣщаніемъ а уменьшаетъ степень довѣрія къ себѣ; если же размѣръ обѣщаній становится безграничнымъ, то степень довѣрія, какого они заслуживаютъ, падаетъ до нуля.

*) Нѣкоторые философы, въ видахъ предосудительныхъ, пытались примѣнять формулы, относящіяся къ ослабленію вѣроятности свидѣтельствъ и преданій къ вѣрованіямъ религіознымъ и тѣмъ поколебать ихъ. Для опроверженія ихъ выводовъ, стоитъ только принять въ соображеніе, что всякое слѣдствіе, выводимое изъ аналитической формулы, не можетъ быть инымъ чѣмъ, какъ только развитіемъ первоначальнаго предположенія, на которомъ формула основана. Если предположеніе ложно, то и слѣдствія анализа будутъ ошибочныя. Поэтому, прежде всего, должно разобрать основательно предположеніе, служащее точкою исхода. Когда этотъ разборъ приведетъ насъ къ заключенію, что въ духовномъ мірѣ есть такіе факты, которые не подчинены физическимъ законамъ, тогда всѣ злонамѣренныя умствованія лжефилософовъ рушатся сами. Въ статьѣ Certitude (Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences, Tome VI) читатели найдутъ примѣчательную выписку изъ сочиненія Аббата Прадъ: Sur la vérité de la religion. Въ этой выпискѣ съ необыкновенною силою ума и съ убѣдительнымъ краснорѣчіемъ разсмотрѣнъ подробно вопросъ, котораго мы здѣсь только коснулись. (Осн. мат. теоріи вѣроят., стр. 326).

Литература.

Bayes. An Essay toward solving a Problem in the Doctrine of Chances. A Demonstration of the second Rule in the Essay towards the Solution of a Problem in the Doctrine of Chances (Lond. Phil. Trans., 1764, 1765).

Condorcet. Mémoire sur le calcul des probabilités (Hist. de l'Acad. des sciences de Paris, 1781—1784).

Condorcet. Essai sur l'application de l'Analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix. 1785.

Cournot. Exposition de la théorie des chances et des probabilités. 1843.

Quetelet. Lettres sur la théorie des probabilités appliquée aux sciences morales et politiques. 1846.

W. Lexis. Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft. 1877.

E. Catalan. Problèmes et théorèmes de probabilités (Mem. de l'Acad. de Belgique. T. XLVI, 1886).

L. Bortkiewicz. Gesetz der kleinen Zahlen. Leipzig, 1898.

М. Тихомандрицкій. Курсъ теоріи вѣроятностей. 1898.

А. Марковъ. О вѣроятности a posteriori (Сообщ. Харьк. мат. общ. 2 сер., T. VII, 1900).

L. Bortkewitsch. Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik (Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik. Bd. LXIII, LXV, LXVI).

L. Bortkiewicz. Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechung auf Statistik (Math. Enzyklopädie 1D. 4a. Leipzig, 1900).

ГЛАВА VII.

Способъ наименьшихъ квадратовъ.

§ 38. Способомъ наименьшихъ квадратовъ называется общеупотребительный прiемъ полученiя приближенныхъ результатовъ изъ многихъ наблюденiй, съ оцѣнкою достоинства этихъ результатовъ*). Чтобы обосновать его на соображенiяхъ, относящихся къ исчисленiю вѣроятностей, мы должны установить рядъ предположенiй и условiй; и прежде всего необходимо допустить существованiе чиселъ, приближенныя величины которыхъ доставляются наблюденiями.

Каждое наблюденiе, дающее то или другое число, мы будемъ разсматривать какъ частный случай многихъ наблюденiй; и соотвѣтственно этому мы будемъ разсматривать, рядомъ съ дѣйствительнымъ результатомъ наблюденiя, воображаемый нами возможный результатъ наблюденiя. Считая данное наблюденiе частнымъ случаемъ многихъ наблюденiй, мы будемъ предполагать, что условiя наблюденiя дѣлятся на двѣ категорiи: условiя постоянныя, сохраняющiяся безъ измѣненiя при всѣхъ вышеупо-

*) Мой взглядъ на различныя попытки теоретическаго обоснованiя способа наименьшихъ квадратовъ изложенъ въ статьѣ «Законъ большихъ чиселъ и способъ наименьшихъ квадратовъ» (Изв. физ.-мат. общ. Каз. Унив. 2-ая с. Т. VIII).

мянутыхъ наблюденіяхъ, частнымъ случаемъ которыхъ является данное, и условія перемѣнныя, или случайныя, мѣняющіяся отъ одного наблюденія до другого. Вмѣстѣ съ тѣмъ допустимъ, что каждому опредѣленному предположенію о величинѣ возможнаго результата наблюденія будетъ соотвѣтствовать опредѣленная вѣроятность въ томъ случаѣ, когда постоянныя условія наблюденія, намъ неизвѣстныя, станутъ извѣстными.

Пусть a означаетъ неизвѣстное число, приближенную величину котораго x' мы получаемъ изъ наблюденія; пусть далѣе x означаетъ возможный результатъ наблюденія, и различными значеніями числа x будутъ

$$x', x'', x''' \dots ;$$

пусть наконецъ

$$q', q'', q''', \dots$$

соотвѣтственно означаютъ вѣроятности этихъ значеній x, когда постоянныя условія наблюденія извѣстны.

Изъ всѣхъ упомянутыхъ здѣсь чиселъ намъ извѣстно только одно x'. Неизвѣстная величина разности

$$a - x'$$

представляетъ дѣйствительную погрѣшность, или ошибку наблюденія; разность же

$$a - x$$

мы будемъ называть возможною погрѣшностью наблюденія, а математическое ожиданіе ея

$$q'(a - x') + q''(a - x'') + q'''(a - x''') + \dots ,$$

равное

$$a - (q'x' + q''x'' + q'''x''' + \dots),$$

назовемъ *постоянною погрѣшностью.*

Величина постоянной погрѣшности намъ, конечно, неизвѣстна; однако въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ мы будемъ считать ее равною нулю. Соотвѣтственно этому мы будемъ говорить, что въ приближенномъ равенствѣ

$$a \doteqdot x'$$

нѣтъ постоянной погрѣшности. Заключенiе объ отсутствiи постоянной погрѣшности часто выводятъ изъ предположенiя, что каждыя двѣ величины возможной погрѣшности, дающiя въ суммѣ нуль, равновѣроятны; но въ послѣднемъ предположенiи нѣтъ надобности для предстоящихъ разсужденiй.

Предположенiе объ отсутствiи постоянной погрѣшности, какъ и приведенное сейчасъ предположенiе, находится въ нѣкоторомъ противорѣчiи съ тѣмъ фактомъ, что различныя причины постоянныхъ погрѣшностей открываются постепенно. Однако въ теоретическихъ разсужденiяхъ мы принимаемъ это предположенiе, какъ необходимое.

Если бы съ числомъ a не было связано болѣе или менѣе опредѣленнаго представленiя, то предположенiе объ отсутствiи постоянной погрѣшности мы могли бы сдѣлать несомнѣннымъ, опредѣляя число a равенствомъ

$$a = q' x' + q'' x'' + q''' x''' + \ldots.$$

Въ дальнѣйшихъ разсужденiяхъ намъ понадобится также математическое ожиданiе квадрата возможной погрѣшности равное суммѣ

$$q' (x' - a)^2 + q'' (x'' - a)^2 - q''' (x''' - a)^2 + \ldots;$$

корень квадратный изъ этой, неизвѣстной намъ, суммы называется *средней квадратичной ошибкой* наблюденiя, или приближеннаго равенства

$$a \doteq x'.$$

Разсматривая результаты различныхъ наблюденiй, мы будемъ предполагать извѣстными отношенiя математическихъ ожиданiй квадратовъ ихъ погрѣшностей другъ къ другу.

Соотвѣтственно этому, вводя для нѣсколькихъ наблюденiй одно и то же неизвѣстное число k, мы будемъ математическое ожиданiе квадрата возможной погрѣшности даннаго наблюденiя представлять въ видѣ дроби

$$\frac{k}{P}$$

съ опредѣленнымъ знаменателемъ P, который мы будемъ называть вѣсомъ наблюденія или вѣсомъ соотвѣтствующаго равенства

$$a \doteqdot x'.$$

Вѣса наблюденій устанавливаются на разныхъ соображеніяхъ, болѣе или менѣе произвольно. На первомъ планѣ приведемъ простѣйшее соображеніе. Именно, если всѣ извѣстныя условія какихъ нибудь наблюденій, дающихъ приближенныя значенія одного и того же числа a, одинаковы, то обыкновенно предполагаютъ, что вѣса этихъ наблюденій одинаковы.

Кромѣ приближенныхъ равенствъ, доставляемыхъ непосредственно наблюденіями, мы будемъ разсматривать и другія приближенныя равенства, которыя будемъ выводить изъ совокупности многихъ наблюденій. Пусть

$$U' \doteqdot 0$$

означаетъ одно изъ такихъ равенствъ. Выраженіе U' составлено опредѣленнымъ образомъ изъ искомыхъ чиселъ, подобныхъ числу a, и изъ чиселъ, доставленныхъ наблюденіями.

Замѣняя числа, доставленныя наблюденіями, воображаемыми возможными результатами наблюденій, получаемъ вмѣсто U' новое выраженіе U, которое назовемъ возможною погрѣшностью приближеннаго равенства

$$U' \doteqdot 0.$$

А математическое ожиданіе U назовемъ постоянною погрѣшностью приближеннаго равенства

$$U' \doteqdot 0.$$

Мы будемъ разсматривать только такія приближенныя равенства установленнаго вида, о которыхъ на основаніи нашихъ данныхъ и предположеній можно утверждать, что ихъ постоянныя погрѣшности равны нулю.

Затѣмъ какъ для равенствъ, доставляемыхъ непосредственно наблюденіями, такъ и для выводныхъ равенствъ мы будемъ оцѣнивать ихъ достоинство вѣсомъ, представляя математическое

ожиданіе квадрата возможной погрѣшности въ видѣ дроби

$$\frac{k}{P},$$

гдѣ по прежнему k означаетъ число неизвѣстное, а P вѣсъ соотвѣтствующаго приближеннаго равенства. Если наблюденія даютъ возможность для какого нибудь неизвѣстнаго числа a составить нѣсколько приближенныхъ равенствъ вида

$$a - X' \doteq 0,$$

гдѣ X' означаетъ число вполнѣ опредѣляемое результатами наблюденій, то мы будемъ выбирать изъ этихъ равенствъ, какъ наилучшее для опредѣленія числа a, равенство, вѣсъ котораго наибольшій.

§ 39. *Случай одного неизвѣстнаго.*

Пусть для опредѣленія неизвѣстнаго числа a произведено n наблюденій, которыя дали для a приближенныя значенія

$$a', a'', \ldots, a^{(n)}.$$

Согласно приведеннымъ выше объясненіямъ рядомъ съ дѣйствительно полученными числами

$$a', a'', \ldots, a^{(n)}$$

мы будемъ разсматривать возможные результаты наблюденій, которые пусть будутъ

$$u', u'', \ldots, u^{(n)};$$

такъ что u' представляетъ возможный результатъ перваго наблюденія, давшаго число a', u'' возможный результатъ второго наблюденія и т. д. Наши наблюденія мы предполагаемъ свободными отъ постоянной погрѣшности и *независимыми другъ отъ друга*, придавая послѣднему условію тотъ смыслъ, что величины

$$u', u'', \ldots, u^{(n)}$$

не зависятъ другъ отъ друга.

Разсматриваемыя нами наблюденія даютъ для опредѣленія числа a рядъ приближенныхъ равенствъ

$$a \doteq a', a \doteq a'', \ldots, a \doteq a^{(n)},$$

которыя согласно нашимъ допущеніямъ и опредѣленіямъ не содержатъ постоянной погрѣшности.

Этимъ равенствамъ мы приписываемъ опредѣленные вѣса

$$p', p'', \ldots, p^{(n)},$$

полагая

$$\text{м. о.}\,(a-u')^2=\frac{k}{p'},\ \text{м. о.}\,(a-u'')^2=\frac{k}{p''}, \cdots\ \text{м. о.}\,(a-u^{(n)})^2=\frac{k}{p^{(n)}}.$$

Пользуясь затѣмъ результатами всѣхъ наблюденій, составимъ изъ приведенныхъ выше n приближенныхъ равенствъ слѣдующее

$$a \doteq \lambda' a' + \lambda'' a'' + \ldots + \lambda^{(n)} a^{(n)},$$

гдѣ выборъ коэффиціентовъ

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}$$

находится въ нашемъ распоряженіи. Мы подчинимъ коэффиціенты

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}$$

двумъ условіямъ, согласно ранѣе высказаннымъ положеніямъ.

Во первыхъ мы потребуемъ, чтобы приближенное равенство

$$a \doteq \lambda' a' + \lambda'' a'' + \ldots + \lambda^{(n)} a^{(n)}$$

было свободно отъ постоянной погрѣшности. Это условіе, очевидно, выражается равенствомъ

$$\lambda' + \lambda'' + \ldots + \lambda^{(n)} = 1,$$

такъ какъ математическое ожиданіе суммы

$$\lambda' u' + \lambda'' u'' + \ldots + \lambda^{(n)} u^{(n)},$$

при любой опредѣленной системѣ чиселъ

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)},$$

равно

$$(\lambda' + \lambda'' + \ldots + \lambda^{(n)})\,a.$$

Во вторыхъ мы потребуемъ, чтобы вѣсъ приближеннаго равенства

$$a \doteq \lambda' a' + \lambda'' a'' + \ldots + \lambda^{(n)} a^{(n)}$$

былъ наибольшимъ. Это требованіе вызывается тѣмъ обстоя-

тельствомъ, что достоинство каждаго приближеннаго равенства мы оцѣниваемъ его вѣсомъ, какъ было выше установлено.

Такимъ образомъ, установивъ рядъ предположенiй и условiй, мы превращаемъ въ опредѣленную математическую задачу вопросъ, лишенный математическаго смысла, о томъ, какъ по возможности лучше воспользоваться результатами многихъ наблюденiй.

Примѣчанiе. Мы ограничились равенствами вида

$$a \ddagger \lambda' a' + \lambda'' a'' + \dots + \lambda^{(n)} a^{(n)}$$

не только ради ихъ особой простоты, но и по той причинѣ, что ни о какомъ другомъ равенствѣ нельзя, на основанiи нашихъ условiй, утверждать, чтобы оно доставляло приближенную величину a безъ постоянной погрѣшности. Напримѣръ, если бы мы положили

$$a \ddagger \sqrt[n]{a' a'' \dots a^{(n)}},$$

или

$$a \ddagger \sqrt{\frac{a' a' + a'' a'' + \dots + a^{(n)} a^{(n)}}{n}},$$

то возможность постоянной погрѣшности не была бы устранена.

Для опредѣленiя вѣса приближеннаго равенства

$$a \ddagger \lambda' a' + \lambda'' a'' + \dots + \lambda^{(n)} a^{(n)}$$

составляемъ математическое ожиданiе квадрата разности

$$a - (\lambda' u' + \lambda'' u'' + \dots + \lambda^{(n)} u^{(n)}).$$

Въ силу условiя

$$\lambda' + \lambda'' + \dots + \lambda^{(n)} = 1$$

этотъ квадратъ равенъ

$$\{\lambda'(u' - a) + \lambda''(u'' - a) + \dots + \lambda^{(n)}(u^{(n)} - a)\}^2 =$$
$$= \lambda'\lambda'(u' - a)^2 + \lambda''\lambda''(u'' - a)^2 + \dots + \lambda^{(n)}\lambda^{(n)}(u^{(n)} - a)^2$$
$$+ 2\lambda'\lambda''(u' - a)(u'' - a) + \dots$$

и математическое ожиданіе его приводится къ

$$k\left[\frac{\lambda'\lambda'}{p'}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+\ldots+\frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}\right];$$

ибо математическія ожиданія квадратовъ

$$(u'-a)^2,\ (u''-a)^2,\ldots,(u^{(n)}-a)^2,$$

по предположенію, равны

$$\frac{k}{p'},\ \frac{k}{p''},\ldots,\ \frac{k}{p^{(n)}},$$

а математическія ожиданія произведеній

$$(u'-a)(u''-a),\ldots,(u''-a)(u^{(n)}-a),\ldots,$$

различныхъ множителей, приводятся къ нулю, въ силу независимости величинъ $u', u'',\ldots, u^{(n)}$. Представляя величину

$$k\left[\frac{\lambda'\lambda'}{p'}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+\ldots+\frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}\right]$$

въ видѣ дроби

$$\frac{k}{P},$$

заключаемъ, что вѣсъ P разсматриваемаго нами приближеннаго равенства

$$a \doteq \lambda' a' + \lambda'' a'' + \ldots + \lambda^{(n)} a^{(n)}$$

опредѣляется формулою

$$P=\frac{1}{\dfrac{\lambda'\lambda'}{p'}+\dfrac{\lambda''\lambda''}{p''}+\ldots+\dfrac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}}.$$

И слѣдовательно этотъ вѣсъ достигнетъ своей наибольшей величины въ томъ случаѣ, когда сумма

$$\frac{\lambda'\lambda'}{p'}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+\ldots+\frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}$$

достигнетъ своей наименьшей величины, при соблюденіи, конечно, условія

$$\lambda'+\lambda''+\ldots+\lambda^{(n)}=1.$$

Съ другой стороны нетрудно установить тожество

$$(p'+p''+..+p^{(n)})\left\{\frac{\lambda'\lambda'}{p'}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+..+\frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}\right\}-(\lambda'+\lambda''+..+\lambda^{(n)})^2$$

$$=\Sigma p^{(i)}p^{(j)}\left\{\frac{\lambda^{(i)}}{p^{(i)}}-\frac{\lambda^{(j)}}{p^{(j)}}\right\}^2,$$

гдѣ i означаетъ каждое изъ чиселъ 2, 3, ... , n, а j означаетъ каждое изъ чиселъ 1, 2, 3, ... , $i-1$.

Приведенное нами тожество показываетъ, что сумма

$$\frac{\lambda'\lambda'}{p'}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+\ldots\ldots+\frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}$$

достигаетъ своего наименьшаго значенія въ томъ случаѣ, когда всѣ разности

$$\frac{\lambda^{(i)}}{p^{(i)}}-\frac{\lambda^{(j)}}{p^{(j)}}$$

обращаются въ нуль. Полагая соотвѣтственно этому

$$\frac{\lambda'}{p'}=\frac{\lambda''}{p''}=\ldots\ldots=\frac{\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}=\frac{\lambda'+\lambda''+\ldots\ldots+\lambda^{(n)}}{p'+p''+\ldots\ldots+p^{(n)}}$$

получаемъ для опредѣленія коэффиціентовъ

$$\lambda', \lambda'', \ldots\ldots, \lambda^{(n)}$$

слѣдующую общую формулу

$$\lambda^{(i)}=\frac{p^{(i)}}{p'+p''+\ldots\ldots+p^{(n)}}.$$

При величинахъ $\lambda', \lambda'', \ldots\ldots, \lambda^{(n)}$, которыя даетъ указанная нами формула, сумма

$$\frac{\lambda'\lambda'}{p'}+\frac{\lambda''\lambda''}{p''}+\ldots\ldots+\frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}$$

достигаетъ своей наименьшей величины

$$\frac{1}{p'+p''+\ldots\ldots+p^{(n)}},$$

а вѣсъ приближеннаго равенства

$$a \doteq \lambda'a'+\lambda''a''+\ldots\ldots+\lambda^{(n)}a^{(n)}$$

достигаетъ своей наибольшей величины

$$p'+p''+\ldots\ldots+p^{(n)}.$$

Въ виду изложенныхъ соображенiй изъ различныхъ приближенныхъ равенствъ, которыя можно установить на основанiи вышеприведенныхъ результатовъ наблюденiй, мы выбираемъ, какъ наилучшее для опредѣленiя числа a, такое

(21) $$a \doteqdot \frac{p' a' + p'' a'' + \ldots + p^{(n)} a^{(n)}}{p' + p'' + \ldots + p^{(n)}}$$

и замѣчаемъ, что его вѣсъ P равенъ суммѣ вѣсовъ первоначальныхъ равенствъ

$$a \doteqdot a', \; a \doteqdot a'', \ldots, \; a \doteqdot a^{(n)},$$

доставленныхъ непосредственно наблюденiями:

(22) $$P = p' + p'' + \ldots + p^{(n)}.$$

Въ простѣйшемъ случаѣ, когда всѣмъ наблюденiямъ мы приписываемъ одинъ и тотъ же вѣсъ, приближенная величина a, опредѣляемая формулой (21), представляетъ среднюю арифметическую изъ величинъ, доставляемыхъ непосредственно наблюденiями; а вѣсъ приближеннаго равенства

$$a \doteqdot \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n}$$

будетъ равенъ числу наблюденiй, если за вѣсъ каждаго наблюденiя мы примемъ единицу.

Положимъ теперь, что кромѣ n наблюденiй, доставившихъ приближенныя равенства

$$a \doteqdot a', a \doteqdot a'', \ldots, a \doteqdot a^{(n)}$$

одинаковаго достоинства, произведено еще m наблюденiй, доставившихъ приближенныя равенства

$$a \doteqdot a^{(n+1)}, \; a \doteqdot a^{(n+2)}, \ldots, \; a \doteqdot a^{(n+m)}$$

также одинаковаго достоинства но, быть можетъ, неравнаго достоинства съ прежними. Приписывая приближеннымъ равенствамъ

$$a \doteqdot a', a \doteqdot a'', \ldots, a \doteqdot a^{(n)}$$

одинаковое достоинство, мы приравняемъ математическiя ожи-

данія квадратовъ ихъ погрѣшностей одному и тому же неизвѣстному числу k_1; а математическія ожиданія квадратовъ погрѣшностей равенствъ

$$a \doteqdot a^{(n+1)},\ a \doteqdot a^{(n+2)}, \ldots,\ a \doteqdot a^{(n+m)}$$

приравняемъ другому неизвѣстному числу k_2.

Затѣмъ изъ совокупности равенствъ

$$a \doteqdot a',\ a \doteqdot a'', \ldots,\ a \doteqdot a^{(n)}$$

мы можемъ вывесть равенство

$$a \doteqdot \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n},$$

для котораго математическое ожиданіе квадрата погрѣшности равно

$$\frac{k_1}{n};$$

а равенствами

$$a \doteqdot a^{(n+1)},\ a \doteqdot a^{(n+2)}, \ldots,\ a \doteqdot a^{(n+m)}$$

можемъ воспользоваться для образованія другого приближеннаго равенства

$$a \doteqdot \frac{a^{(n+1)} + a^{(n+2)} + \ldots + a^{(n+m)}}{m},$$

математическое ожиданіе квадрата погрѣшности котораго равно

$$\frac{k_2}{m}.$$

Если же, съ цѣлью лучшаго опредѣленія числа a, мы пожелаемъ воспользоваться всѣми $n + m$ равенствами

$$a \doteqdot a',\ a \doteqdot a'', \ldots,\ a \doteqdot a^{(n)},\ a \doteqdot a^{(n+1)}, \ldots,\ a \doteqdot a^{(n+m)};$$

то должны будемъ, такъ или иначе, установить величину отношенія $\frac{k_1}{k_2}$. Начиная съ простѣйшаго предположенія, положимъ

$$k_1 = k_2.$$

Тогда совокупность всѣхъ $n + m$ равенствъ

$$a \doteqdot a',\ a \doteqdot a'', \ldots,\ a \doteqdot a^{(n+m)}$$

доставитъ намъ такое равенство

$$a \mp \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n+m)}}{n+m},$$

для котораго математическое ожиданіе квадрата погрѣшности будетъ выражаться дробью

$$\frac{k_1}{n+m} = \frac{k_2}{n+m}.$$

Замѣтимъ, что равенство

$$a \mp \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n+m)}}{n+m}$$

можетъ быть получено какъ слѣдствіе двухъ равенствъ

$$a \mp \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n} \quad \text{и} \quad a \mp \frac{a^{(n+1)} + \ldots + a^{(n+m)}}{m},$$

вѣса которыхъ пропорціональны числамъ n и m; такъ какъ

$$\frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n+m)}}{n+m} = \frac{\frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n} n + \frac{a^{(n+1)} + \ldots + a^{(n+m)}}{m} m}{n+m}.$$

Въ томъ же случаѣ, когда мы имѣемъ основанія сомнѣваться въ правильности допущенія

$$k_1 = k_2,$$

возникаетъ вопросъ о приближенномъ вычисленіи чиселъ k_1 и k_2.

Мы установимъ общую формулу для приближеннаго вычисленія величинъ подобныхъ k_1 и k_2.

Въ примѣненіи къ разсматриваемому случаю эта формула даетъ два приближенныхъ равенства

$$k_1 \mp k'_1 \quad \text{и} \quad k_2 \mp k'_2,$$

на основаніи которыхъ мы будемъ считать отношеніе $\frac{k_1}{k_2}$, неизвѣстныхъ чиселъ k_1 и k_2, равнымъ отношенію $\frac{k'_1}{k'_2}$, извѣстныхъ чиселъ k'_1 и k'_2. Приписавъ отношенію $\frac{k_1}{k_2}$ опредѣленную величину $\frac{k'_1}{k'_2}$, мы можемъ уже воспользоваться совокупностью всѣхъ

$n + m$ равенствъ

$$a \mp a', \; a \mp a'', \ldots, \; a \mp a^{(n+m)}$$

для вывода новой приближенной величины a. И если математическія ожиданія квадратовъ погрѣшностей различныхъ приближенныхъ равенствъ мы станемъ выражать дробями съ однимъ и тѣмъ же числителемъ k_1, то можемъ вѣсъ каждаго изъ равенствъ

$$a \mp a', \; a \mp a'', \ldots, \; a \mp a^{(n)}$$

считать равнымъ единицѣ, а вѣсъ каждаго изъ равенствъ

$$a \mp a^{(n+1)}, \; a \mp a^{(n+2)}, \ldots, \; a \mp a^{(n+m)}$$

считать равнымъ отношенію $\frac{k'_1}{k'_2}$, въ силу тожества

$$k_2 = \frac{k_1}{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)}.$$

При такихъ условіяхъ изъ совокупности $n + m$ равенствъ

$$a \mp a', \; a \mp a'', \ldots, \; a \mp a^{(n+m)}$$

мы выведемъ новое равенство

$$a \mp \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)} + \frac{k'_1}{k'_2}\left(a^{(n+1)} + \ldots + a^{(n+m)}\right)}{n + m\frac{k'_1}{k'_2}},$$

вѣсъ котораго равенъ

$$n + m\frac{k'_1}{k'_2}.$$

Послѣднее равенство можетъ быть выведено также изъ двухъ равенствъ

$$a \mp \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n} \quad \text{и} \quad a \mp \frac{a^{(n+1)} + \ldots + a^{(n+m)}}{m},$$

вѣса которыхъ пропорціональны числамъ

$$n \quad \text{и} \quad m\frac{k'_1}{k'_2}.$$

Намѣтивъ цѣль дальнѣйшихъ вычисленій, возвратимся къ общему случаю и соотвѣтственно приближенному равенству

$$a \mp \frac{p'a' + p''a'' + \ldots + p^{(n)}a^{(n)}}{p' + p'' + \ldots + p^{(n)}}$$

положимъ

$$a_0 = \frac{p'a' + p''a'' + \ldots + p^{(n)}a^{(n)}}{p' + p'' + \ldots + p^{(n)}}$$

и

$$\xi = \frac{p'u' + p''u'' + \ldots + p^{(n)}u^{(n)}}{p' + p'' + \ldots + p^{(n)}}.$$

Примѣчаніе. Если мы будемъ разсматривать суммы

$$\Sigma p^{(i)}(u^{(i)} - \xi)^2 = p'(u' - \xi)^2 + p''(u'' - \xi)^2 + \ldots + p^{(n)}(u^{(n)} - \xi)^2$$

и

$$\Sigma p^{(i)}(a^{(i)} - a_0)^2 = p'(a' - a_0)^2 + p''(a'' - a_0)^2 + \ldots + p^{(n)}(a^{(n)} - a_0)^2$$

какъ функціи перемѣнныхъ ξ и a_0, считая всѣ остальныя величины, входящія въ эти суммы, числами данными, то установленныя нами формулы опредѣлятъ значенія ξ и a_0, которымъ соотвѣтствуютъ наименьшія величины разсматриваемыхъ суммъ.

Слѣдовательно величина a_0, которую мы принимаемъ за новое приближенное значеніе a, сообщаетъ наименьшую величину суммѣ квадратовъ

$$\Sigma \{\sqrt{p^{(i)}}(a^{(i)} - a_0)\}^2;$$

отсюда и происходитъ названіе «способъ наименьшихъ квадратовъ».

Мы докажемъ, что математическое ожиданіе суммы

$$\Sigma p^{(i)}(u^{(i)} - \xi)^2 = p'(u' - \xi)^2 + p''(u'' - \xi)^2 + \ldots + p^{(n)}(u^{(n)} - \xi)^2$$

равно

$$(n-1)k.$$

Для этого на основаніи равенствъ

$$\Sigma p^{(i)}(u^{(i)} - a) = (\xi - a)\Sigma p^{(i)}$$

и

$$\Sigma p^{(i)}(u^{(i)} - \xi) = 0,$$

послѣдовательно получаемъ

$$\Sigma p^{(i)}(u^{(i)} - \xi)^2 = \Sigma p^{(i)}(u^{(i)} - \xi)(u^{(i)} - a - \xi + a)$$
$$= \Sigma p^{(i)}(u^{(i)} - \xi)(u^{(i)} - a) - (\xi - a)\Sigma p^{(i)}(u^{(i)} - \xi)$$

$$\Sigma p^{(i)}(u^{(i)} - \xi)^2 = \Sigma p^{(i)}(u^{(i)} - a - \xi + a)(u^{(i)} - a)$$
$$= \Sigma p^{(i)}(u^{(i)} - a)^2 - (\xi - a)\Sigma p^{(i)}(u^{(i)} - a)$$
$$= \Sigma p^{(i)}(u^{(i)} - a)^2 - (\xi - a)^2\Sigma p^{(i)};$$

и затѣмъ, принимая во вниманіе, что математическія ожиданія произведеній
$$p^{(i)}(u^{(i)}-a)^2 \quad \text{и} \quad (\xi-a)^2\Sigma p^{(i)}$$
равны k, изъ равенства
$$\Sigma p^{(i)}(u^{(i)}-\xi)^2=\Sigma p^{(i)}(u^{(i)}-a)^2-(\xi-a)^2\Sigma p^{(i)}$$
выводимъ
$$\text{м. о. } \Sigma p^{(i)}(u^{(i)}-\xi)^2=\text{м. о. } \Sigma p^{(i)}(u^{(i)}-a)^2-\text{м. о. } (\xi-a)^2\Sigma p^{(i)}$$
$$=nk-k=(n-1)k.$$

Итакъ

(23) $$\text{м. о. } \Sigma p^{(i)}(u^{(i)}-\xi)^2=(n-1)k.$$

Равенствомъ (23) пользуются для приближеннаго вычисленія числа k, замѣняя въ лѣвой его части математическое ожиданіе суммы
$$\Sigma p^{(i)}(u^{(i)}-\xi)^2$$
тѣмъ частнымъ значеніемъ ея, которое соотвѣтствуетъ результатамъ наблюденій. Такимъ образомъ получается равенство
$$k \doteqdot \frac{\Sigma p^{(i)}(a^{(i)}-a_0)^2}{n-1},$$
свободное отъ постоянной погрѣшности. Раздѣляя число
$$\frac{\Sigma p^{(i)}(a^{(i)}-a_0)^2}{n-1}$$
на вѣса приближенныхъ равенствъ, получимъ приближенныя величины математическихъ ожиданій квадратовъ ихъ погрѣшностей. Напримѣръ
$$\frac{\Sigma p^{(i)}(a^{(i)}-a_0)^2}{(n-1)\Sigma p^{(i)}}$$
будетъ приближенною величиною математическаго ожиданія квадрата погрѣшности равенства
$$a \doteqdot a_0=\frac{p'a'+p''a''+\ldots+p^{(n)}a^{(n)}}{p'+p''+\ldots+p^{(n)}}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда всѣмъ равенствамъ
$$a \doteqdot a', \quad a \doteqdot a'', \ldots, \quad a \doteqdot a^{(n)}$$

мы приписываемъ одинаковый вѣсъ, имѣемъ

$$a_0 = \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n}$$

и для математическаго ожиданія квадрата погрѣшности каждаго изъ данныхъ равенствъ

$$a \mp a', \quad a \mp a'', \ldots, \quad a \mp a^{(n)}$$

получаемъ приближенную величину

$$k'_1 = \frac{\sum \left\{ a^{(i)} - \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n} \right\}^2}{n-1}.$$

Подобнымъ же образомъ, разсматривая рядъ другихъ равенствъ

$$a \mp a^{(n+1)}, \quad a \mp a^{(n+2)}, \ldots, \quad a \mp a^{(n+m)},$$

которымъ мы также приписываемъ одинаковый вѣсъ, для математическаго ожиданія квадрата погрѣшности каждаго изъ нихъ получаемъ приближенную величину

$$k'_2 = \frac{\sum \left\{ a^{(j)} - \frac{a^{(n+1)} + a^{(n+2)} + \ldots + a^{(n+m)}}{m} \right\}^2}{m-1},$$

гдѣ

$$j = n+1, \quad n+2, \ldots, \quad n+m.$$

Такимъ образомъ мы установили основные элементы способа наименьшихъ квадратовъ для случая одного неизвѣстнаго.

Сверхъ того часто разсматриваютъ вѣроятности различныхъ предположеній о величинѣ погрѣшности получаемыхъ приближенныхъ равенствъ. Но это разсмотрѣніе соединено съ особымъ предположеніемъ, въ которомъ раньше мы не имѣли надобности. Пусть будетъ Δ неизвѣстная намъ погрѣшность одного изъ равенствъ, подобныхъ равенству

$$a \mp a' \quad \text{или} \quad a \mp a_0,$$

и пусть вычислена приближенная величина математическаго ожиданія квадрата Δ по указанному выше способу, или инымъ путемъ. Обозначимъ найденное нами математическое ожиданіе Δ^2

буквою h и допустимъ, что вѣроятность неравенствъ

$$c < \Delta < \partial,$$

при любыхъ значеніяхъ c и ∂, выражается интеграломъ

$$\int_c^\partial Ae^{-\mu x^2}\,dx,$$

гдѣ A и μ числа постоянныя (см. § 29).

Тогда постоянныя A и μ опредѣлятся двумя равенствами

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-\mu x^2}\,dx = 1 \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} Ax^2 e^{-\mu x^2}\,dx = h,$$

которыя приводятся къ слѣдующимъ

$$\frac{A}{\sqrt{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ и } \frac{A}{\sqrt{\mu^3}} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}},$$

откуда находимъ

$$\mu = \frac{1}{2h} \text{ и } A = \frac{1}{\sqrt{2h\pi}}.$$

Соотвѣтственно этому за вѣроятность неравенствъ

$$c < \Delta < \partial$$

принимаютъ интегралъ

$$\frac{1}{\sqrt{2h\pi}} \int_c^\partial e^{-\frac{x^2}{2h}}\,dx,$$

который приводится къ

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{c}{\sqrt{2h}}}^{\frac{\partial}{\sqrt{2h}}} e^{-z^2}\,dz,$$

посредствомъ подстановки

$$\frac{x^2}{2h} = z^2.$$

Затѣмъ, чтобы оправдать указанное выраженіе вѣроятности, разсматриваютъ погрѣшность Δ какъ сумму многихъ независимыхъ погрѣшностей и ссылаются на приближенное выраженіе вѣроятности, что сумма многихъ независимыхъ величинъ лежитъ въ данныхъ предѣлахъ, приведенное нами въ третьей главѣ.

Другое оправданіе того же выраженія вѣроятности основано на согласіи его съ наблюденіями. Для разъясненія, въ чемъ

усматриваютъ это согласіе, положимъ, что n наблюденій одинаковаго достоинства дали для неизвѣстнаго числа a значенія

$$a', a'' \ldots, a^{(n)}.$$

При большихъ величинахъ n за истинную величину a принимаютъ

$$\frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n}$$

и соотвѣтственно этому считаютъ разности

$$a^{(i)} - \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n}, \text{ при } i = 1, 2 \ldots n,$$

погрѣшностями наблюденій. Далѣе полагаютъ

$$h = \frac{\sum\left(a^{(i)} - \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n}\right)^2}{n-1}$$

и считаютъ двоякимъ образомъ число погрѣшностей, лежащихъ въ данныхъ предѣлахъ. Именно, съ одной стороны, считаютъ число разностей

$$a^{(i)} - \frac{a' + a'' + \ldots + a^{(n)}}{n},$$

которыя лежатъ въ данныхъ предѣлахъ; а, съ другой стороны, на основаніи теоремы Бернулли и указаннаго выше выраженія вѣроятности неравенствъ

$$c < \Delta < \partial$$

допускаютъ, что число погрѣшностей, лежащихъ между c и ∂, равно

$$\frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{c : \sqrt{2h}}^{\partial : \sqrt{2h}} e^{-z^2} dz.$$

Опубликовано нѣсколько примѣровъ, въ которыхъ такіе два счета даютъ для числа погрѣшностей одинаковыя или близкія величины. По этому поводу считаю не лишнимъ привести небольшую выдержку изъ сочиненія Пуанкаре «La Science et l'Hypothèse». «Un physicien éminent me disait un jour à propos de la loi des erreurs. Tout le monde y croit fermement parce que les mathématiciens s'imaginent que c'est un fait d'observation, et les observateurs que c'est un théorème de mathématiques».

Впрочемъ, если вышеприведенное, обычное, выраженіе вѣроятности не примѣнимо къ отдѣльнымъ наблюденіямъ, то мы всетаки имѣемъ основаніе допустить его, для среднихъ выводовъ изъ многихъ наблюденій, какъ приближенное.

Вмѣсто математическаго ожиданія квадрата погрѣшности часто разсматриваютъ *среднюю квадратичную ошибку* и *вѣроятную ошибку*. Средняя квадратичная ошибка, равная корню квадратному изъ математическаго ожиданія квадрата погрѣшности, при сдѣланномъ нами предположеніи приведется къ $\sqrt{h}$.

А вѣроятная ошибка опредѣляется условіемъ одинаковой вѣроятности предположенія, что числовая величина погрѣшности меньше вѣроятной ошибки, и предположенія, что числовая величина погрѣшности больше вѣроятной ошибки.

Если по прежнему допустить, что вѣроятность неравенствъ

$$c < \Delta < d,$$

при любыхъ значеніяхъ c и d, выражается выше приведеннымъ интеграломъ, то вѣроятная ошибка выразится произведеніемъ

$$\rho \sqrt{h},$$

гдѣ число ρ представляетъ рѣшеніе уравненія

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\rho}{\sqrt{2}}} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2},$$

откуда находимъ

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}} = 0{,}47693\ldots \quad \text{и} \quad \rho = 0{,}67448\ldots$$

Въ виду такихъ опредѣленныхъ соотношеній между математическимъ ожиданіемъ квадрата погрѣшности, среднею квадратичною ошибкою и вѣроятною ошибкою, въ каждомъ частномъ случаѣ достаточно разсматривать одну изъ этихъ трехъ величинъ.

§ 40. *Опредѣленіе вѣроятностей по наблюденіямъ.*

Остановимся на приложеніи только что изложенныхъ разсужденій и вычисленій къ важному вопросу объ опредѣленіи вѣроятностей по наблюденіямъ, который мы разсматривали въ предыдущей главѣ, съ другой точки зрѣнія.

Пусть, по прежнему, существуетъ неизвѣстная намъ постоянная вѣроятность α появленія нѣкотораго событія E при повторяемыхъ независимыхъ испытаніяхъ, какъ въ 3^{ей}, 4ой, 5ой, и 6ой задачахъ предыдущей главы. Положимъ, что намъ извѣстенъ результатъ s испытаній: событіе E появилось σ разъ.

Остальныя условія задачъ предыдущей главы мы отбрасываемъ и вовсе не будемъ разсматривать вѣроятностей, которыя относятся къ различнымъ предположеніямъ о величинѣ α и опредѣляются нашими данными; мы ихъ теперь не вводимъ и ихъ у насъ нѣтъ. Задача наша состоитъ теперь не въ разысканіи вѣроятностей различныхъ предположеній о величинѣ α, а въ приближенномъ вычисленіи этой величины, согласно только что изложеннымъ принципамъ.

Такимъ образомъ характеръ вопроса существенно измѣненъ, на что необходимо обратить вниманіе.

Разсматривая каждое изъ произведенныхъ s испытаній, въ отдѣльности, и принимая во вниманіе ихъ результаты, мы можемъ установить σ приближенныхъ равенствъ

$$\alpha \doteqdot 1$$

и $s - \sigma$ приближенныхъ равенствъ

$$\alpha \doteqdot 0.$$

Этимъ равенствамъ соотвѣтствуютъ s величинъ

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_s,$$

представляющихъ, согласно вышеприведеннымъ объясненіямъ, возможные результаты испытаній:

1 съ вѣроятностью α, 0 съ вѣроятностью $1-\alpha$.

Математическія ожиданія всѣхъ этихъ x, очевидно, равны числу α; поэтому въ нашихъ

σ равенствахъ $\alpha \doteqdot 1$ и $s-\sigma$ равенствахъ $\alpha \doteqdot 0$

нѣтъ постоянныхъ погрѣшностей.

Что касается математическихъ ожиданій квадратовъ погрѣшностей:

$$(x_1 - \alpha)^2,\ (x_2 - \alpha)^2, \ldots,\ (x_s - \alpha)^2;$$

то они всѣ равны одному и тому же неизвѣстному числу

$$\alpha(1 - \alpha).$$

Слѣдовательно, въ данномъ случаѣ, вѣса всѣхъ равенствъ одинаковы и должны быть приравнены единицѣ, если за число k, общихъ разсужденій, мы возьмемъ теперь

$$\alpha(1 - \alpha).$$

А при равенствѣ вѣсовъ способъ наименьшихъ квадратовъ даетъ намъ такое новое приближенное равенство

$$\alpha \doteqdot \frac{\sigma}{s},$$

вѣсъ котораго, согласно общей теоремѣ, равенъ s.

Вмѣстѣ съ тѣмъ, примѣняя къ данному примѣру формулу (23), получаемъ для приближеннаго вычисленія числа k равенство

$$k \doteqdot \frac{\sigma(s-\sigma)^2 + (s-\sigma)\sigma^2}{s^2(s-1)} = \frac{\sigma(s-\sigma)}{s(s-1)},$$

не содержащее постоянной погрѣшности.

Интересно замѣтить, что приближенную величину k мы могли бы, въ данномъ случаѣ, вывесть изъ сопоставленія точнаго равенства

$$k = \alpha(1 - \alpha)$$

съ вышеуказаннымъ приближеннымъ

$$\alpha \doteqdot \frac{\sigma}{s};$$

такое сопоставленіе даетъ для k величину

$$\frac{\sigma(s-\sigma)}{s^2},$$

отличающуюся отъ вышеприведенной множителемъ $\frac{s-1}{s}$, близкимъ къ единицѣ. Надо однако помнить, что равенство

$$k \doteqdot \frac{\sigma(s-\sigma)}{s^2},$$

которое немного проще вышеприведеннаго, не вполнѣ свободно отъ постоянной погрѣшности; ибо математическое ожиданіе выраженія $\frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_s)(s - x_1 - x_2 - \ldots - x_s)}{s^2}$

равно $\frac{s-1}{s} k$, а пе k.

Пойдемъ далѣе, расширяя нашу задачу. А именно, предположимъ теперь, что неизвѣстная постоянная вѣроятность α опредѣляется не одною, а нѣсколькими серіями испытаній.

Пусть эти серіи состоятъ изъ

$$s', s'', \ldots, s^{(n)}$$

испытаній и сопровождаются появленіемъ разсматриваемаго событія соотвѣтственно

$$\sigma', \sigma'', \ldots, \sigma^{(n)}$$

разъ. При такихъ предположеніяхъ получаемъ, согласно вышеприведенному, n приближенныхъ равенствъ

$$\alpha \doteqdot \frac{\sigma'}{s'}, \alpha \doteqdot \frac{\sigma''}{s''}, \ldots, \alpha \doteqdot \frac{\sigma^{(n)}}{s^{(n)}},$$

вѣса которыхъ, соотвѣтственно, выражаются числами

$$s', s'', \ldots, s^{(n)},$$

если k сохраняетъ прежнее значеніе

$$\alpha(1-\alpha).$$

Примѣняя къ этой совокупности равенствъ, свободныхъ отъ постоянныхъ погрѣшностей, способъ наименьшихъ квадратовъ, получаемъ результатъ

$$\alpha \doteqdot \frac{\sigma}{s},$$

гдѣ

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' + \ldots + \sigma^{(n)} \text{ и } s = s' + s'' + \ldots + s^{(n)};$$

нашъ результатъ свободенъ отъ постоянной погрѣшности, а вѣсъ его равенъ s.

Что же касается числа k, то согласно формулѣ (23) имѣемъ

$$k \doteqdot \frac{1}{n-1} \sum s^{(i)} \left\{ \frac{\sigma^{(i)}}{s^{(i)}} - \frac{\sigma}{s} \right\}^2.$$

Съ другой стороны на основаніи точнаго равенства

$$k = \alpha(1 - \alpha)$$

можно положить

$$k \doteqdot \frac{\sigma}{s}\left(1 - \frac{\sigma}{s}\right).$$

Послѣднее равенство не свободно отъ постоянной погрѣшности; но свободно отъ нея равенство

$$k \doteqdot \frac{\sigma}{s-1}\left(1 - \frac{\sigma}{s}\right),$$

мало отъ него отличающееся, при s большомъ.

Какъ видно, въ данномъ случаѣ мы получаемъ для k два различныхъ приближенныхъ равенства, которыя оба не содержатъ постоянной погрѣшности.

Это обстоятельство можетъ для каждой данной совокупности чиселъ

$$\sigma',\ s',\ \sigma'',\ s'', \ldots,\ \sigma^{(n)},\ s^{(n)}$$

служить, до извѣстной степени, для подкрѣпленія или опроверженія нашихъ основныхъ предположеній о независимости испытаній и постоянствѣ вѣроятности, смотря по тому, окажутся ли значенія k, доставляемыя различными равенствами, близкими другъ къ другу, или напротивъ они будутъ сильно расходиться.

Закончимъ наши разсужденія объ опредѣленіи вѣроятностей по наблюденіямъ численнымъ примѣромъ, который возьмемъ изъ одной статьи*) Пирсона, но разсмотримъ не по Пирсону.

Дѣло идетъ объ опытахъ профессора Вельдона съ 12ью обыкновенными игральными костями. Каждый опытъ состоялъ въ одновременномъ бросаніи всѣхъ 12 костей, при чемъ считалось общее число появленій нумеровъ 5 и 6. Число опытовъ было 26306; результаты ихъ представлены въ слѣдующей табличкѣ

---

*) Karl Pearson. On the Criterion that a given System of Deviations from the Probable in the Case of a Correlated System of Variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from Random Sampling. (Philosophical Magazine and Journal of Science. Vol. L. July — December 1900.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
185	1149	3265	5475	6114	5194	3067	1331	403	105	14	4	0

Здѣсь въ верхней строкѣ приведены всѣ возможныя значенія числа появленій нумеровъ 5 и 6, при отдѣльномъ опытѣ; и подъ каждымъ изъ этихъ 13 значеній указано, въ нижней строкѣ, число опытовъ, давшихъ его. Мы имѣемъ

$$12 \times 26306 = 315672$$

бросаній по одной кости, которыя дали слѣдующее число появленій нумеровъ 5 и 6:

$$\left.\begin{array}{l} 1149+3.5475+5.5194+7.1331+9.105 \\ +2.3265+4.6114+6.3067+8.403+10.14+11.4 \end{array}\right\} = 106602.$$

Приступимъ къ разсужденіямъ и соотвѣтствующимъ вычисленіямъ. Если даннымъ считать только фактъ, что кость имѣетъ 6 граней, на которыхъ стоятъ нумера 1, 2, 3, 4, 5, 6, то вѣроятность появленія нумеровъ 5 и 6, иначе сказать непоявленія нумеровъ 1, 2, 3, 4, для каждаго бросанія кости, въ отдѣльности, будетъ равна $\frac{1}{3}$. Если же исходитъ только изъ факта, что совокупность 315672 бросаній дала 106602 появленій нумеровъ 5 и 6, то для бросанія, взятаго изъ этой совокупнотси, вѣроятность тѣхъ же нумеровъ выразиться дробью $\frac{106602}{315672} \doteq 0,33770$.

Первая величина вѣроятности опредѣлена только па основаніи принадлежности нумеровъ 5 и 6 къ группѣ шести нумеровъ, состоящей ихъ этихъ двухъ нумеровъ и изъ четырехъ другихъ; вторая же величина вѣроятности установлена только на основаніи принадлежности бросанія къ группѣ 315672, изъ которыхъ 106602 сопровождались появленіемъ нумеровъ 5 и 6.

Обѣ величины точно соотвѣтствуютъ своимъ даннымъ; онѣ не совпадаютъ, въ виду различія данныхъ. Въ исчисленіи вѣроятностей нѣтъ формулы для соединенія первыхъ данныхъ со

вторыми въ одну совокупность; но есть формула, которая, до извѣстной степени, позволяетъ судить о степени ихъ согласованности. Эта формула опредѣляетъ вѣроятность, что отклоненіе числа появленій событія отъ произведенія вѣроятности его на число испытаній превзойдетъ данную величину.

Для намѣченной цѣли, полагаемъ вѣроятность событія равною $\frac{1}{3}$, а число испытаній равнымъ 315672 и ищемъ вѣроятность, что разность между числомъ появленій событій и числомъ 105224, составляющимъ $\frac{1}{3}$ числа испытаній, достигнетъ

$$106602-105224=1378,$$

или превзойдетъ это число.

Полагая соотвѣтственно этому въ извѣстной формулѣ (6) Лапласа

$$p=\frac{1}{3},\quad n=315672,\quad t=\frac{1378.3}{\sqrt{4.315672}}\doteq 3{,}67,$$

находимъ, что вѣроятность такихъ большихъ отклоненій, приблизительно равна

$$1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{3,67} e^{-t^2}dt=0{,}0000002.$$

Столь малая вѣроятность, конечно, не свидѣтельствуетъ о согласіи результатовъ произведенныхъ испытаній съ тѣмъ, что вѣроятность появленія одного изъ нумеровъ 5 и 6, для каждаго бросанія кости, равна $\frac{1}{3}$.

Чтобы приложить затѣмъ къ нашему примѣру разсужденія предыдущей главы и способъ наименьшихъ квадратовъ, какъ онъ у насъ изложенъ, мы должны допустить, кромѣ указанныхъ двухъ вполнѣ опредѣленныхъ вѣроятностей, существованіе третьей неизвѣстной намъ вѣроятности α, которая и должна остаться для насъ неизвѣстной, такъ какъ она опредѣляется неизвѣстными намъ постоянными условіями испытаній.

Принимая всѣ условія, указанныя въ задачѣ 5^ой шестой главы, мы можемъ по данному числу испытаній ($n=315672$) и по данному числу появленій событія ($m=106602$) найти вѣ-

роятность, что α лежитъ между какими нибудь данными числами α' и α'' $(0 < \alpha' < \alpha'' < 1)$, подставляя данныя величины m, n, α', α'' въ общее выраженіе (18)

$$\frac{\int_{\alpha'}^{\alpha''} x^m (1-x)^{n-m}\, dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^{n-m}\, dx};$$

чѣмъ мы и воспользуемся для приближеннаго вычисленія вѣроятности, что α отклоняется отъ $\frac{106602}{315672}$ меньше, чѣмъ на разность

$$\frac{106602}{315672} - \frac{1}{3} = \frac{1378}{315672}.$$

Но предварительно надо вывесть изъ точнаго выраженія вѣроятности приближенное, удобное для вычисленія. Чтобы придти къ такому выраженію, дѣлимъ подъинтегральную функцію $x^m(1-x)^{n-m}$ въ обоихъ интегралахъ

$$\int_{\alpha'}^{\alpha''} x^m (1-x)^{n-m}\, dx \text{ и } \int_0^1 x^m (1-x)^{n-m}\, dx,$$

на ея наибольшее значеніе $\left(\frac{m}{n}\right)^m \left(\frac{n-m}{n}\right)^{n-m}$, котораго она достигаетъ при $x = \frac{m}{n}$. Затѣмъ вводимъ новое перемѣнное z, связывая его съ x линейнымъ равенствомъ

$$x = \frac{m}{n} + z\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}},$$

и разлагаемъ логарифмъ произведенія $\left(\frac{nx}{m}\right)^m \left(\frac{n(1-x)}{n-m}\right)^{n-m}$ въ рядъ по степенямъ z, на основаніи простыхъ формулъ:

$$\log\left(\frac{nx}{m}\right)^m = m \log\left(1 + z\sqrt{\frac{2(n-m)}{nm}}\right) = z\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n}} - \frac{n-m}{n} z^2 + \ldots,$$

$$\log\left(\frac{n(1-x)}{n-m}\right)^{n-m} = (n-m)\log\left(1 - z\sqrt{\frac{2m}{n(n-m)}}\right)$$

$$= -z\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n}} - \frac{m}{n} z^2 - \ldots$$

Мы приходимъ такимъ образомъ къ приближенному равенству

$$\log\left(\frac{nx}{m}\right)^m \left(\frac{n(1-x)}{n-m}\right)^{n-m} \doteq -z^2,$$

отбрасывая всѣ члены съ высшими степенями z.

Замѣняя на этомъ основаніи произведеніе $\left(\frac{nx}{m}\right)^m \left(\frac{n(1-x)}{n-m}\right)^{n-m}$, въ обоихъ интегралахъ, показательною функціею e^{-z^2} и принимая за предѣлы для z, во второмъ интегралѣ $-\infty$ и $+\infty$, немедленно получаемъ общеупотребительное приближенное выраженіе

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{z'}^{z''} e^{-z^2}dz$$

для вѣроятности, что α лежитъ въ предѣлахъ

$$\frac{m}{n} + z'\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}} \text{ и } \frac{m}{n} + z''\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}.$$

Обращаясь къ нашему числовому примѣру, находимъ

$$-z' = z'' = 1378\sqrt{\frac{315672}{2.106602.209070}} \doteq 3{,}67$$

и потому

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{z'}^{z''} e^{-z^2}dz \doteq 0{,}9999998;$$

слѣдовательно вѣроятность, что отклоненіе числа α отъ $\frac{106602}{315672}$ достигаетъ величины $\frac{1378}{315672}$, соотвѣтствующей $\alpha = \frac{1}{3}$, или больше ея, оказывается, при нашихъ данныхъ, весьма малою и приблизительно равна ранѣе полученному числу 0,0000002.

Этотъ результатъ подобенъ прежнему, но съ нимъ не совпадаетъ: хотя неравенства, вѣроятностями которыхъ мы занимались, имѣютъ одинаковый видъ въ обѣихъ задачахъ:

$$\text{чис. зн.}\left(\frac{m}{n} - \alpha\right) \geqq \frac{1378}{315672},$$

но въ первой задачѣ вѣроятность событія (α) была даннымъ числомъ, а число появленій его (m) неопредѣленнымъ, а во второй, наоборотъ, число появленій событія (m) было даннымъ, а вѣроятность его (α) неопредѣленнымъ числомъ.

Примѣняя, наконецъ, къ данному примѣру способъ наименьшихъ квадратовъ, мы также допускаемъ существованіе неизвѣстной постоянной вѣроятности α, для которой получаемъ на основаніи результатовъ опытовъ приближенное равенство

$$\alpha \mathrel{+\!\!\!\!=} \frac{\sigma}{s} = \frac{106602}{315672} \mathrel{+\!\!\!\!=} 0,3377.$$

Неизвѣстному числу α мы не приписываемъ теперь различныхъ значеній, а потому у насъ нѣтъ и вѣроятностей ихъ; зато дробь $\frac{\sigma}{s}$, съ неизмѣннымъ знаменателемъ $s = 315672$, мы разсматриваемъ какъ способную получать, кромѣ наблюденнаго, много другихъ значеній. Согласно установленнымъ положеніямъ наше равенство $\alpha \mathrel{+\!\!\!\!=} \frac{106602}{315672}$ свободно отъ постоянной погрѣшности; вѣсъ его равенъ 315672, а математическое ожиданіе квадрата погрѣшности выражается въ видѣ дроби $\frac{k}{315672}$.

Что касается числа k, то для приближеннаго вычисленія его мы имѣемъ двѣ формулы. Одна изъ нихъ даетъ

$$k \mathrel{+\!\!\!\!=} \frac{106602}{315672} \cdot \frac{209070}{315672} \mathrel{+\!\!\!\!=} 0,2236.$$

Другая формула даетъ

$$26305k \mathrel{+\!\!\!\!=} \sum 12 N_i \left(\frac{i}{12} - \alpha^0\right)^2,$$

гдѣ

$$\alpha^0 = \frac{106602}{315672} \mathrel{+\!\!\!\!=} 0,33770, \quad N_0 = 185, \quad N_1 = 1149 \quad \text{и т. д.}$$

Наши вычисленія указаны въ таблицѣ. Получился результатъ

$$k \mathrel{+\!\!\!\!=} \frac{12.492,7}{26305} \mathrel{+\!\!\!\!=} 0,2247$$

близкій къ найденному раньше, по болѣе простой формулѣ.

Отношеніе

$$\frac{0,2247}{0,2236}$$

двухъ приближенныхъ значеній числа k отличается отъ единицы менѣе чѣмъ на $\frac{1}{200}$.

Въ концѣ книги приведены два другихъ примѣра вычисленія подобнаго отношенія, которое я называю *коэффиціентомъ дисперсіи*, хотя обычно такое названіе присвоено корню квадратному изъ указаннаго отношенія.

i	N_i	$\frac{i}{12} - \alpha^0$	$\left(\frac{i}{12} - \alpha^0\right)^2$	$N_i\left(\frac{i}{12} - \alpha^0\right)^2$
0	185	−0,33770	0,11404	21,1
1	1149	−0,25437	0,06470	74,3
2	3265	−0,17103	0,02925	95,5
3	5475	−0,08770	0,00769	42,1
4	6114	−0,00437	0,00002	0,1
5	5194	+0,07897	0,00624	32,4
6	3067	+0,16230	0,02634	80,8
7	1331	+0,24563	0,06033	80,3
8	403	+0,32897	0,10822	43,6
9	105	+0,41230	0,16999	17,8
10	14	+0,49563	0,24565	3,4
11	4	+0,57897	0,33521	1,3

$$\sum N_i\left(\frac{i}{12} - \alpha^0\right)^2 = 492,7.$$

§ 41. *Случай многихъ неизвѣстныхъ.*

Переходя къ случаю многихъ неизвѣстныхъ, положимъ, что требуется найти m чиселъ

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

и что наблюденія дали приближенныя значенія

$$b', b'', \ldots, b^{(n)}$$

выраженій

$$A'_1 a_1 + A'_2 a_2 + \ldots + A'_m a_m,$$

$$A''_1 a_1 + A''_2 a_2 + \ldots + A''_m a_m,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A^{(n)}_1 a_1 + A^{(n)}_2 a_2 + \ldots + A^{(n)}_m a_m,$$

линейныхъ относительно искомыхъ чиселъ. Коэффиціенты A этихъ n выраженій мы предполагаемъ числами данными.

Каждое наблюденіе мы будемъ попрежнему разсматривать какъ частный случай многихъ наблюденій. Соотвѣтственно этому рядомъ съ каждымъ числомъ $b^{(j)}$, которое доставлено наблюденіемъ и представляетъ приближенное значеніе суммы

$$A^{(j)}_1 a_1 + A^{(j)}_2 a_2 + \ldots + A^{(j)}_m a_m,$$

мы будемъ разсматривать возможный результатъ $u^{(j)}$ того же наблюденія.

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы будемъ предполагать, что равенство

$$A^{(j)}_1 a_1 + A^{(j)}_2 a_2 + \ldots + A^{(j)}_m a_m \doteq b^{(j)}$$

свободно отъ постоянной погрѣшности; другими словами будемъ считать математическое ожиданіе числа $u^{(j)}$ равнымъ суммѣ

$$A^{(j)}_1 a_1 + A^{(j)}_2 a_2 + \ldots + A^{(j)}_m a_m.$$

Степень достоинства приближенныхъ равенствъ

$$A'_1 a_1 + A'_2 a_2 + \ldots + A'_m a_m \doteq b',$$

$$A''_1 a_1 + A''_2 a_2 + \ldots + A''_m a_m \doteq b'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A^{(n)}_1 a_1 + A^{(n)}_2 a_2 + \ldots + A^{(n)}_m a_m \doteq b^{(n)}$$

мы будемъ оцѣнивать ихъ вѣсами

$$p', p'', \ldots, p^{(n)},$$

полагая

$$\text{м. о.}\left[u^{(j)} - c^{(j)}\right]^2 = \frac{k}{p^{(j)}},$$

при

$$c^{(j)} = A_1^{(j)} a_1 + A_2^{(j)} a_2 + \ldots + A_m^{(j)} a_m.$$

Наблюденія мы будемъ предполагать независимыми для того, чтобы математическія ожиданія произведеній каждыхъ двухъ различныхъ множителей, изъ совокупности

$$u' - c', u'' - c'', \ldots, u^{(n)} - c^{(n)},$$

приводились къ нулю.

Затѣмъ мы разсмотримъ отдѣльно два предположенія.

Начнемъ съ предположенія, что намъ неизвѣстно никакихъ соотношеній между искомыми числами

$$a_1, a_2, \ldots, a_m.$$

Пусть a_l означаетъ одно изъ искомыхъ чиселъ.

Для вывода, изъ вышеприведенныхъ равенствъ, приближенной величины a_l вводимъ вспомогательные множители

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}$$

и полагаемъ

$$a_l \doteq \lambda' b' + \lambda'' b'' + \ldots + \lambda^{(n)} b^{(n)}.$$

Коэффиціенты

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}$$

мы подчинимъ такимъ же двумъ условіямъ, какъ и въ случаѣ одного неизвѣстнаго.

Первое условіе состоитъ въ томъ, чтобы изъ установленныхъ положеній несомнѣнно слѣдовало, что равенство

$$a_l \doteq \lambda' b' + \lambda'' b'' + \ldots + \lambda^{(n)} b^{(n)}$$

свободно отъ постоянной погрѣшности. Въ силу этого условія мы разсматриваемъ только такія совокупности чиселъ

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)},$$

для каждой изъ которыхъ выполняется равенство

$$\text{м. о.}\left(\lambda' u' + \lambda'' u'' + \ldots + \lambda^{(n)} u^{(n)}\right) = a_l$$

при произвольныхъ значеніяхъ

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_m.$$

Но

$$\text{м. о.}\left(\lambda' u' + \lambda'' u'' + \ldots + \lambda^{(n)} u^{(n)}\right) = \lambda' c' + \lambda'' c'' + \ldots + \lambda^{(n)} c^{(n)}$$

и

$$c^{(j)} = A_1^{(j)} a_1 + A_2^{(j)} a_2 + \ldots + A_m^{(j)} a_m,$$

поэтому равенство

$$\text{м. о.}\left(\lambda' u' + \lambda'' u'' + \ldots + \lambda^{(n)} u^{(n)}\right) = a_l$$

приводится къ слѣдующему

$$\left.\begin{array}{l} \left(A_1' \lambda' + A_1'' \lambda'' + \ldots + A_1^{(n)} \lambda^{(n)}\right) a_1 \\ + \left(A_2' \lambda' + A_2'' \lambda'' + \ldots + A_2^{(n)} \lambda^{(n)}\right) a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \left(A_m' \lambda' + A_m'' \lambda'' + \ldots + A_m^{(n)} \lambda^{(n)}\right) a_m \end{array}\right\} = a_l,$$

которое въ виду неопредѣленности чиселъ

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_m$$

разбивается на m равенствъ; а именно, должно быть

$$\left.\begin{array}{l} A_l' \lambda' + A_l'' \lambda'' + \ldots + A_l^{(n)} \lambda^{(n)} = 1 \\ A_i' \lambda' + A_i'' \lambda'' + \ldots + A_i^{(n)} \lambda^{(n)} = 0 \end{array}\right\} \quad (*),$$

и

гдѣ i означаетъ любое изъ чиселъ

$$1,\ 2, \ldots,\ m,$$

кромѣ l.

Второе условіе состоитъ въ томъ, чтобы вѣсъ нашего равенства

$$a_l \doteq \lambda' b' + \lambda'' b'' + \ldots + \lambda^{(n)} b^{(n)}$$

былъ наибольшимъ. Мы найдемъ этотъ вѣсъ, разсматривая ма-

тематическое ожиданіе квадрата разности

$$\xi_l - a_l,$$

гдѣ

$$\xi_l = \lambda' u' + \lambda'' u'' + \ldots + \lambda^{(n)} u^{(n)}.$$

Что же касается разности

$$\xi_l - a_l,$$

то она равна

$$\lambda'(u' - c') + \lambda''(u'' - c'') + \ldots + \lambda^{(n)}(u^{(n)} - c^{(n)});$$

ибо

$$a_l = \lambda' c' + \lambda'' c'' + \ldots + \lambda^{(n)} c^{(n)}.$$

Поэтому

$$(\xi_l - a_l)^2 = \lambda'\lambda'(u' - c')^2 + \lambda''\lambda''(u'' - c'')^2 + \ldots + \lambda^{(n)}\lambda^{(n)}(u^{(n)} - c^{(n)})^2$$
$$+ 2\lambda'\lambda''(u' - c')(u'' - c'') + \ldots$$

и

$$\text{м. о. } (\xi_l - a_l)^2 = k\left\{\frac{\lambda'\lambda'}{p'} + \frac{\lambda''\lambda''}{p''} + \ldots + \frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}\right\};$$

слѣдовательно вѣсъ разсматриваемаго приближеннаго равенства выражается дробью

$$\frac{1}{\dfrac{\lambda'\lambda'}{p'} + \dfrac{\lambda''\lambda''}{p''} + \ldots + \dfrac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}},$$

какъ и въ случаѣ одного неизвѣстнаго, и достигаетъ своего наибольшаго значенія тогда, когда сумма

$$\frac{\lambda'\lambda'}{p'} + \frac{\lambda''\lambda''}{p''} + \ldots + \frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}$$

достигаетъ своего наименьшаго значенія.

Мы пришли такимъ образомъ къ слѣдующей задачѣ.

Изъ различныхъ совокупностей коэффиціентовъ

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)},$$

удовлетворяющихъ условіямъ (*), найти ту, для которой сумма

$$\frac{\lambda'\lambda'}{p'} + \frac{\lambda''\lambda''}{p''} + \ldots + \frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}$$

достигаетъ своей наименьшей величины.

Чтобы примѣнить къ этой задачѣ извѣстный способъ вспомогательныхъ множителей, составляемъ выраженіе

$$S = \frac{1}{2} T - \mu_1 T_1 - \mu_2 T_2 \ldots - \mu_m T_m,$$

гдѣ

$$T = \frac{\lambda' \lambda'}{p'} + \frac{\lambda'' \lambda''}{p''} + \ldots + \frac{\lambda^{(n)} \lambda^{(n)}}{p^{(n)}},$$

$$T_1 = A_1' \lambda' + A_1'' \lambda'' + \ldots + A_1^{(n)} \lambda^{(n)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$T_m = A_m' \lambda' + A_m'' \lambda'' + \ldots + A_m^{(n)} \lambda^{(n)},$$

коэффиціенты же

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$$

представляютъ вспомогательныя неизвѣстныя. Считая числа

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$$

постоянными, а

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}$$

перемѣнными, согласно извѣстному правилу приравниваемъ нулю производныя отъ S по каждому изъ этихъ перемѣнныхъ.

Мы получаемъ систему n уравненій

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda'}{p'} &= \mu_1 A_1' + \mu_2 A_2' + \ldots + \mu_m A_m', \\ \frac{\lambda''}{p''} &= \mu_1 A_1'' + \mu_2 A_2'' + \ldots + \mu_m A_m'', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\lambda^{(n)}}{p^{(n)}} &= \mu_1 A_1^{(n)} + \mu_2 A_2^{(n)} + \ldots + \mu_m A_m^{(n)} \end{aligned}\right\} \quad (**),$$

которая вмѣстѣ съ прежнею системою m уравненій (*) должна служить для опредѣленія $n + m$ чиселъ

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m.$$

Для рѣшенія составленныхъ нами уравненій подставляемъ въ уравненія (*) выраженія

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}$$

черезъ вспомогательные множители

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m,$$

доставляемыя уравненіями (**).

Такая подстановка приводитъ къ системѣ m уравненій

$$\left.\begin{array}{l}
G_{1,1}\ \mu_1 + G_{1,2}\ \mu_2 + \ldots + G_{1,m}\ \mu_m = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
G_{l-1,1}\,\mu_1 + G_{l-1,2}\,\mu_2 + \ldots + G_{l-1,m}\,\mu_m = 0, \\
G_{l,1}\ \mu_1 + G_{l,2}\ \mu_2 + \ldots + G_{l,m}\ \mu_m = 1, \\
G_{l+1,1}\,\mu_1 + G_{l+1,2}\,\mu_2 + \ldots + G_{l+1,m}\,\mu_m = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
G_{m,1}\ \mu_1 + G_{m,2}\ \mu_2 + \ldots + G_{m,m}\ \mu_m = 0
\end{array}\right\} \quad ({}_*{}^*{}_*),$$

коэффиціенты которой опредѣляются по формулѣ

$$G_{i,j} = G_{j,i} = p' A'_i A'_j + p'' A''_i A''_j + \ldots + p^{(n)} A^{(n)}_i A^{(n)}_j.$$

Замѣтимъ, что опредѣлитель

$$\Delta = \left|\begin{array}{l}
G_{1,1},\quad G_{1,2}, \ldots, \quad G_{1,m} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
G_{l,1},\quad G_{l,2}, \ldots, \quad G_{l,m} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
G_{m,1},\quad G_{m,2}, \ldots, \quad G_{m,m}
\end{array}\right|,$$

составленный изъ всѣхъ этихъ коэффиціентовъ, долженъ, на основаніи теоремы умноженія опредѣлителей, быть равнымъ суммѣ квадратовъ опредѣлителей всѣхъ системъ m^2 элементовъ, которыя получаются изъ системы

$$\left.\begin{array}{l}
A'_1 \sqrt{p'},\ A''_1 \sqrt{p''},\ A'''_1 \sqrt{p'''}, \ldots,\ A^{(n)}_1 \sqrt{p^{(n)}} \\
A'_2 \sqrt{p'},\ A''_2 \sqrt{p''},\ A'''_2 \sqrt{p'''}, \ldots,\ A^{(n)}_2 \sqrt{p^{(n)}} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A'_m \sqrt{p'},\ A''_m \sqrt{p''},\ A'''_m \sqrt{p'''}, \ldots,\ A^{(n)}_m \sqrt{p^{(n)}}
\end{array}\right\} \quad (A)$$

посредствомъ вычеркиванія $n-m$ столбцовъ, если только

$$n \geqq m;$$

если же $n < m$, то опредѣлитель Δ равенъ нулю. Поэтому для существованія одного и только одного рѣшенія поставленныхъ нами уравненій надо исключить изъ разсмотрѣнія какъ случаи, когда $n < m$, такъ и случаи, когда при $n \geqq m$ обращаются въ нуль опредѣлители всѣхъ системъ m^2 элементовъ, которыя получаются изъ (A) посредствомъ вычеркиванія $n-m$ столбцовъ.

Необходимость исключенія такихъ случаевъ можетъ быть установлена независимо отъ излагаемыхъ нами пріемовъ.

Она вытекаетъ изъ того обстоятельства, что въ исключаемыхъ нами случаяхъ по даннымъ величинамъ суммъ

$$A_1' a_1 + A_2' a_2 + \dots + A_m' a_m,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A_1^{(n)} a_1 + A_2^{(n)} a_2 + \dots + A_m^{(n)} a_m,$$

нельзя опредѣлить искомыхъ чиселъ $a_1, a_2, \dots, a_m$.

Изъ вспомогательныхъ множителей

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$$

особое значеніе имѣетъ μ_l, такъ какъ дробь

$$\frac{1}{\mu_l}$$

выражаетъ вѣсъ приближеннаго равенства

$$a_l \doteq \lambda' b' + \lambda'' b'' + \dots + \lambda^{(n)} b^{(n)},$$

если коэффиціенты

$$\lambda', \lambda'', \dots, \lambda^{(n)}$$

опредѣлены выше установленными уравненіями.

При другихъ же значеніяхъ

$$\lambda', \lambda'', \dots, \lambda^{(n)},$$

удовлетворяющихъ только уравненіямъ (*), вѣсъ равенства

$$a_l + \lambda' b' + \lambda'' b'' + \ldots + \lambda^{(n)} b^{(n)}$$

будетъ меньше $\frac{1}{\mu_l}$, какъ мы сейчасъ докажемъ.

Пусть, въ самомъ дѣлѣ, совокупность чиселъ

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$$

будетъ рѣшеніемъ системы уравненій (⁎*⁎).

Подразумѣвая затѣмъ подъ

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}$$

перемѣнныя числа, обозначимъ символами

$$\overline{\lambda'}, \overline{\lambda''}, \ldots, \overline{\lambda^{(n)}}$$

значенія этихъ перемѣнныхъ, опредѣляемыя уравненіями (**); иначе сказать, положимъ

$$\frac{\overline{\lambda^{(i)}}}{p^{(i)}} = \mu_1 A_1^{(i)} + \mu_2 A_2^{(i)} + \ldots + \mu_m A_m^{(i)}$$

при

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

При такихъ условіяхъ выраженіе

$$S = \frac{1}{2} T - \mu_1 T_1 - \mu_2 T_2 \ldots - \mu_m T_m$$

можетъ быть представлено подъ видомъ алгебраической суммы

$$\frac{(\lambda' - \overline{\lambda'})^2}{2p'} + \frac{(\lambda'' - \overline{\lambda''})^2}{2p''} + \ldots + \frac{(\lambda^{(n)} - \overline{\lambda^{(n)}})^2}{2p^{(n)}}$$

$$- \frac{\overline{\lambda'}\,\overline{\lambda'}}{2p'} - \frac{\overline{\lambda''}\,\overline{\lambda''}}{2p''} - \ldots - \frac{\overline{\lambda^{(n)}}\,\overline{\lambda^{(n)}}}{2p^{(n)}}.$$

Съ другой стороны имѣемъ

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda'\lambda'}{p'} + \frac{\lambda''\lambda''}{p''} + \ldots + \frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}\right) - \mu_l$$

во всѣхъ случаяхъ, когда числа

$$\lambda', \lambda'', \ldots . \lambda^{(n)}$$

удовлетворяютъ вышеустановленнымъ уравненіямъ (*).

Слѣдовательно для всякой системы чиселъ

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)},$$

которая удовлетворяетъ уравненіямъ (*), должно быть

$$\frac{\lambda'\lambda'}{2p'} + \frac{\lambda''\lambda''}{2p''} + \ldots + \frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{2p^{(n)}} = \frac{(\lambda' - \overline{\lambda'})^2}{2p'} + \ldots + \frac{(\lambda^{(n)} - \overline{\lambda^{(n)}})^2}{2p^{(n)}} + \mu_l$$
$$- \frac{\overline{\lambda'}\,\overline{\lambda'}}{2p'} - \frac{\overline{\lambda''}\,\overline{\lambda''}}{2p''} - \ldots - \frac{\overline{\lambda^{(n)}}\,\overline{\lambda^{(n)}}}{2p^{(n)}};$$

откуда при

$$\lambda' = \overline{\lambda'},\ \lambda'' = \overline{\lambda''}, \ldots, \ \lambda^{(n)} = \overline{\lambda^{(n)}}$$

выводимъ

$$\frac{\overline{\lambda'}\,\overline{\lambda'}}{p'} + \frac{\overline{\lambda''}\,\overline{\lambda''}}{p''} + \ldots + \frac{\overline{\lambda^{(n)}}\,\overline{\lambda^{(n)}}}{p^{(n)}} = \mu_l.$$

Отсюда нетрудно также заключить, что μ_l представляетъ наименьшую величину, которой можетъ достигать сумма

$$\frac{\lambda'\lambda'}{p'} + \frac{\lambda''\lambda''}{p''} + \ldots + \frac{\lambda^{(n)}\lambda^{(n)}}{p^{(n)}}$$

при соблюденіи уравненій (*); ибо сумма

$$\frac{\overline{\lambda'}\,\overline{\lambda'}}{p'} + \frac{\overline{\lambda''}\,\overline{\lambda''}}{p''} + \ldots + \frac{\overline{\lambda^{(n)}}\,\overline{\lambda^{(n)}}}{p^{(n)}}$$

равна μ_l по доказанному, сумма же

$$\frac{(\lambda' - \overline{\lambda'})^2}{2p'} + \ldots + \frac{(\lambda^{(n)} - \overline{\lambda^{(n)}})^2}{2p^{(n)}}$$

не можетъ быть числомъ отрицательнымъ.

Итакъ изъ всѣхъ равенствъ

$$a_l = \lambda' b' + \lambda'' b'' + \ldots + \lambda^{(n)} b^{(n)},$$

о которыхъ на основаніи нашихъ данныхъ и условій можно утверждать, что они свободны отъ постоянной погрѣшности, наиболь-

шимъ вѣсомъ отличается то, коэффиціенты котораго

$$\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}$$

опредѣляются уравненіями (**) и ($_*{}^*{}_*$); и этотъ наибольшій вѣсъ равенъ дроби

$$\frac{1}{\mu_l}.$$

Послѣднюю же дробь, знаменатель которой опредѣляется изъ системы уравненій ($_*{}^*{}_*$), можно при помощи обозначеній теоріи опредѣлителей представить отношеніемъ

$$\frac{\Delta}{\Delta_{l,l}},$$

гдѣ

$$\Delta_{l,l} = \begin{vmatrix} G_{1,1} & ,\ldots, & G_{1,l-1} & , & G_{1,l+1} & ,\ldots, & G_{1,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{l-1,1} & ,\ldots, & G_{l-1,l-1} & , & G_{l-1,l+1} & ,\ldots, & G_{l-1,m} \\ G_{l+1,1} & ,\ldots, & G_{l+1,l-1} & , & G_{l+1,l+1} & ,\ldots, & G_{l+1,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{m,1} & ,\ldots, & G_{m,l-1} & , & G_{m,l+1} & ,\ldots, & G_{m,m} \end{vmatrix}.$$

Въ дальнѣйшихъ выводахъ намъ потребуются и другіе миноры, перваго порядка, опредѣлителя Δ. Припомнимъ, что при помощи своихъ миноровъ опредѣлитель Δ выражается суммами:

$$\Delta = G_{1,1}\Delta_{1,1} + G_{1,2}\Delta_{1,2} + \ldots + G_{1,m}\Delta_{1,m} = G_{1,1}\Delta_{1,1} + G_{2,1}\Delta_{2,1} + \ldots + G_{m,1}\Delta_{m,1}$$
$$= G_{2,1}\Delta_{2,1} + G_{2,2}\Delta_{2,2} + \ldots + G_{2,m}\Delta_{2,m} = G_{1,2}\Delta_{1,2} + G_{2,2}\Delta_{2,2} + \ldots + G_{m,2}\Delta_{m,2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

гдѣ вообще $\Delta_{i,j}$ означаетъ произведеніе $(-1)^{i+j}$ на опредѣлитель, получаемый изъ Δ посредствомъ вычеркиванія столбца

$$\begin{matrix} G_{1,j} \\ G_{2,j} \\ \cdot \\ \cdot \\ G_{m,j} \end{matrix}$$

и строки

$$G_{i,1}\ G_{i,2}, \ldots, G_{i,m}.$$

Припомнимъ также, что каждая сумма

$$G_{1,i}\Delta_{1,j}+G_{2,i}\Delta_{2,j}+\ldots.+G_{m,i}\Delta_{m,j},$$

гдѣ i и j двà различныхъ числа изъ совокупности чиселъ

$$1,\ 2,\ 3,\ldots.,\ m,$$

обращается въ нуль, равно какъ и сумма

$$G_{i,1}\Delta_{j,1}+G_{i,2}\Delta_{j,2}+\ldots.+G_{i,m}\Delta_{j,m}.$$

Наконецъ нетрудно установить равенства

$$\Delta_{i,j}=\Delta_{j,i},$$

какъ слѣдствіе симметричности опредѣлителя Δ.

Итакъ, полагая

$$a_l^0=\lambda' b'+\lambda'' b''+\ldots.+\lambda^{(n)} b^{(n)}$$

и опредѣляя коэффиціенты

$$\lambda',\ \lambda'',\ldots.,\ \lambda^{(n)}$$

уравненіями (**) и ($_*{}^*{}_*$) при различныхъ значеніяхъ l, мы можемъ получить приближенныя величины

$$a_1^0,\ a_2^0,\ldots.,\ a_m^0$$

для всѣхъ искомыхъ чиселъ

$$a_1,\ a_2,\ldots.,\ a_m.$$

Тѣ же самыя приближенныя величины могутъ быть опредѣлены одною довольно простою системою уравненій.

§ 42. Имѣя въ виду придти къ этой системѣ, составимъ выраженія

$$W=\Sigma p\,(A_1\xi_1+A_2\xi_2+\ldots.+A_m\xi_m-u)^2$$

и

$$W^0=\Sigma p\,(A_1 a_1^0+A_2 a_2^0+\ldots.+A_m a_m^0-b)^2,$$

первое изъ которыхъ означаетъ сумму

$$p'(A_1'\xi_1+A_2'\xi_2+\ldots.+A_m'\xi_m-u')^2+p''(A_1''\xi_1+\ldots.+A_m''\xi_m-u'')^2$$
$$+\ldots.+p^{(n)}(A_1^{(n)}\xi_1+A_2^{(n)}\xi_2+\ldots.+A_m^{(n)}\xi_m-u^{(n)})^2,$$

второе же получается изъ перваго черезъ соотвѣтственную замѣну

$$\xi_1,\ \xi_2, \ldots, \xi_m,\ u',\ u'', \ldots, u^{(n)}$$

числами

$$a_1^0,\ a_2^0, \ldots, a_m^0,\ b',\ b'', \ldots, b^{(n)}.$$

Мы будемъ разсматривать выраженіе W какъ функцію перемѣнныхъ

$$\xi_1,\ \xi_2, \ldots, \xi_m,$$

а выраженіе W^0 какъ функцію перемѣнныхъ

$$a_1^0,\ a_2^0, \ldots, a_m^0,$$

считая постоянными не только данныя числа

$$p',\ p'', \ldots, p^{(n)},\ b',\ b'', \ldots, b^{(n)},$$

но и неопредѣленныя числа

$$u',\ u'', \ldots, u^{(n)}.$$

При такихъ условіяхъ не трудно установить, что W достигаетъ своей наименьшей величины для тѣхъ значеній

$$\xi_1,\ \xi_2, \ldots, \xi_m,$$

которыя опредѣляются формулою

$$\xi_l = \lambda' u' + \lambda'' u'' + \ldots + \lambda^{(n)} u^{(n)}$$

и уравненіями (**) и $({}_*{}^*{}_*)$ при $l = 1, 2, \ldots m$; и потому W^0 достигаетъ своей наименьшей величины для тѣхъ значеній

$$a_1^0,\ a_2^0, \ldots, a_m^0,$$

которыя опредѣляются уравненіями (**), $({}_*{}^*{}_*)$ и формулой

$$a_l^0 = \lambda' b' + \lambda'' b'' + \ldots + \lambda^{(n)} b^{(n)}.$$

Для доказательства приравниваемъ нулю производныя выраженія W по

$$\xi_1,\ \xi_2, \ldots, \xi_m,$$

что даетъ намъ систему уравненій

$$
(24) \quad \begin{cases}
G_{1,1}\,\xi_1 + \ldots + G_{m,1}\,\xi_m = A'_1 p' u' + \ldots + A_1^{(n)} p^{(n)} u^{(n)}, \\
G_{1,2}\,\xi_1 + \ldots + G_{m,2}\,\xi_m = A'_2 p' u' + \ldots + A_2^{(n)} p^{(n)} u^{(n)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
G_{1,m}\,\xi_1 + \ldots + G_{m,m}\,\xi_m = A'_m p' u' + \ldots + A_m^{(n)} p^{(n)} u^{(n)},
\end{cases}
$$

гдѣ $G_{i,j}$ по прежнему означаетъ сумму

$$p' A'_i A'_j + p'' A''_i A''_j + \ldots + p^{(n)} A_i^{(n)} A_j^{(n)}.$$

Такою системою опредѣляются тѣ значенія

$$\xi_1,\ \xi_2, \ldots,\ \xi_m,$$

для которыхъ выраженіе W достигаетъ своей наименьшей величины. Придавая затѣмъ буквѣ l прежнее значеніе, можемъ изъ системы уравненій (24) исключить всѣ неизвѣстныя

$$\xi_1,\ \xi_2, \ldots,\ \xi_m$$

кромѣ ξ_l, при помощи тѣхъ же множителей

$$\mu_1,\ \mu_2, \ldots,\ \mu_m,$$

которыми мы пользовались раньше. Дѣйствительно изъ уравненій (24) легко вытекаетъ уравненіе

$$
\left.\begin{array}{l}
\mu_1\,(G_{1,1}\,\xi_1 + \ldots + G_{m,1}\,\xi_m) \\
+ \mu_2\,(G_{1,2}\,\xi_1 + \ldots + G_{m,2}\,\xi_m) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \mu_m\,(G_{1,m}\,\xi_1 + \ldots + G_{m,m}\,\xi_m)
\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}
\mu_1\,(A'_1\,p' u' + \ldots + A_1^{(n)} p^{(n)} u^{(n)}) \\
+ \mu_2\,(A'_2\,p' u' + \ldots + A_2^{(n)} p^{(n)} u^{(n)}) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \mu_m\,(A'_m\,p' u' + \ldots + A_m^{(n)} p^{(n)} u^{(n)}),
\end{array}\right.
$$

которое въ силу уравненій $({}_*{}^*{}_*)$ даетъ

$$
\xi_l = \left\{\begin{array}{l}
(\mu_1 A'_1 + \mu_2 A'_2 + \ldots + \mu_m A'_m)\; p' u' \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ (\mu_1 A_1^{(n)} + \mu_2 A_2^{(n)} + \ldots + \mu_m A_m^{(n)})\, p^{(n)} u^{(n)}
\end{array}\right.
$$

Сравнивая послѣднее выраженіе ξ_l съ выраженіемъ ξ_l, опредѣленнымъ формулою

$$\xi_l = \lambda' u' + \lambda'' u'' + \ldots + \lambda^{(n)} u^{(n)}$$

и равенствами (**), тотчасъ убѣждаемся въ тожественности этихъ двухъ выраженій ξ_l. Итакъ установленныя раньше формулы и уравненія опредѣляютъ тѣ же величины

$$\xi_1,\ \xi_2, \ldots, \xi_m,$$

какъ и система (24). Нашъ выводъ сохраняетъ силу, каковы бы ни были значенія чиселъ

$$u',\ u'', \ldots, u^{(n)}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда

$$u' = b',\ u'' = b'', \ldots, u^{(n)} = b^{(n)},$$

отсюда слѣдуетъ, что выраженіе W^0 дѣйствительно достигаетъ своей наименьшей величины при тѣхъ значеніяхъ

$$a_1^0,\ a_2^0, \ldots, a_m^0,$$

опредѣленіемъ которыхъ мы занимались въ предыдущемъ параграфѣ. Этимъ обстоятельствомъ объясняется названіе *способъ наименьшихъ квадратовъ;* ибо W^0 представляетъ сумму квадратовъ выраженій вида

$$\sqrt{p}\,(A_1 a_1^0 + A_2 a_2^0 + \ldots + A_m a_m^0 - b).$$

Итакъ всѣ искомыя числа

$$a_1^0,\ a_2^0, \ldots, a_m^0,$$

служащія приближенными величинами для неизвѣстныхъ

$$a_1,\ a_2, \ldots, a_m,$$

могутъ быть найдены изъ одной системы уравненій

$$(25)\quad \begin{aligned} &G_{1,1}\, a_1^0 + \ldots + G_{m,1}\, a_m^0 = A_1'\, p' b' + \ldots + A_1^{(n)} p^{(n)} b^{(n)},\\ &G_{1,2}\, a_1^0 + \ldots + G_{m,2}\, a_m^0 = A_2'\, p' b' + \ldots + A_2^{(n)} p^{(n)} b^{(n)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &G_{1,m}\, a_1^0 + \ldots + G_{m,m}\, a_m^0 = A_m' p' b' + \ldots + A_m^{(n)} p^{(n)} b^{(n)}. \end{aligned}$$

Величины же

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m,$$

связанныя съ величинами

$$u', u'', \ldots, u^{(n)}$$

формулой

$$\xi_l = \lambda' u' + \lambda'' u'' + \ldots + \lambda^{(n)} u^{(n)}$$

и уравненіями (**) и ($_*{}^*{}_*$), удовлетворяютъ системѣ уравненій (24). Разсматривая наконецъ вмѣсто

$$u', u'', \ldots, u^{(n)}, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$$

разности

$$u' - c' = v', u'' - c'' = v'', \ldots, u^{(n)} - c^{(n)} = v^{(n)}$$

$$\xi_1 - a_1 = \eta_1, \xi_2 - a_2 = \eta_2, \ldots, \xi_m - a_m = \eta_m,$$

можемъ установить уравненія

$$G_{1,1}\,\eta_1 + G_{2,1}\,\eta_2 + \ldots + G_{m,1}\,\eta_m = \omega_1,$$
$$G_{1,2}\,\eta_1 + G_{2,2}\,\eta_2 + \ldots + G_{m,2}\,\eta_m = \omega_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$G_{1,m}\,\eta_1 + G_{2,m}\,\eta_2 + \ldots + G_{m,m}\,\eta_m = \omega_m,$$

гдѣ вообще

$$\omega_i = A'_i p' v' + A''_i p'' v'' + \ldots + A^{(n)}_i p^{(n)} v^{(n)}.$$

Эти уравненія послужатъ намъ для вторичнаго опредѣленія вѣсовъ приближенныхъ равенствъ

$$a_1 \doteq a_1^0, \; a_2 \doteq a_2^0, \ldots, \; a_m \doteq a_m^0,$$

иначе сказать, для опредѣленія отношеній неизвѣстнаго числа k къ математическимъ ожиданіямъ величинъ

$$\eta_1^2 = (\xi_1 - a_1)^2, \; \eta_2^2 = (\xi_2 - a_2)^2, \ldots, \; \eta_m^2 = (\xi_m - a_m)^2.$$

При помощи тѣхъ же уравненій мы покажемъ, что математическое ожиданіе выраженія W равно

$$(n - m)\,k,$$

если

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$$

связаны съ

$$u', u'', \ldots, u^{(n)}$$

уравненіями (24), какъ мы и предполагаемъ. Для намѣченной цѣли изъ установленныхъ уравненій выводимъ

$$\Delta\eta_1 = \Delta_{1,1}\,\omega_1 + \Delta_{1,2}\,\omega_2 + \ldots + \Delta_{1,m}\,\omega_m,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta\eta_m = \Delta_{m,1}\,\omega_1 + \Delta_{m,2}\,\omega_2 + \ldots + \Delta_{m,m}\,\omega_m,$$

гдѣ Δ и $\Delta_{i,j}$ имѣютъ вышеустановленный смыслъ.

Помноживъ затѣмъ обѣ части равенства

$$\Delta\eta_l = \Delta_{l,1}\,\omega_1 + \Delta_{l,2}\,\omega_2 + \ldots + \Delta_{l,m}\,\omega_m$$

на ω_j и η_i, получаемъ два равенства

$$\Delta\omega_j\,\eta_l = \Delta_{l,1}\,\omega_j\,\omega_1 + \Delta_{l,2}\,\omega_j\,\omega_2 + \ldots + \Delta_{l,m}\,\omega_j\,\omega_m$$

и

$$\Delta\eta_i\,\eta_l = \Delta_{l,1}\,\omega_1\,\eta_i + \Delta_{l,2}\,\omega_2\,\eta_i + \ldots + \Delta_{l,m}\,\omega_m\,\eta_i,$$

которыя даютъ возможность свести разысканіе математическихъ ожиданій произведеній

$$\omega_j\,\eta_l \text{ и } \eta_i\,\eta_l$$

къ разысканію математическихъ ожиданій произведеній вида

$$\omega_i\,\omega_j.$$

А произведеніе $\omega_i\,\omega_j$, равное

$$(A_i' p' v' + \ldots + A_i^{(n)} p^{(n)} v^{(n)})\,(A_j' p' v' + \ldots + A_j^{(n)} p^{(n)} v^{(n)}),$$

приводится къ суммѣ

$$A_i' A_j' (p' v')^2 + A_i'' A_j'' (p'' v'')^2 + \ldots + A_i^{(n)} A_j^{(n)} (p^{(n)} v^{(n)})^2$$

и такихъ произведеній, каждое изъ которыхъ содержитъ, кромѣ постоянныхъ, два различныхъ количества системы

$$v', v'', \ldots, v^{(n)}.$$

Поэтому математическое ожиданіе произведенія $\omega_i\,\omega_j$ оди-

наково съ математическимъ ожиданіемъ суммы

$$A'_i A'_j (p' v')^2 + A''_i A''_j (p'' v'')^2 + \ldots + A_i^{(n)} A_j^{(n)} (p^{(n)} v^{(n)})^2;$$

послѣднее же, какъ нетрудно видѣть, равно произведенію числа k на сумму

$$p' A'_i A'_j + p'' A''_i A''_j + \ldots + p^{(n)} A_i^{(n)} A_j^{(n)},$$

которую мы обозначаемъ символомъ

$$G_{i,j}.$$

Слѣдовательно

$$\text{м. о. } \omega_i \omega_j = kG_{i,j}$$

и потому равенство

$$\Delta\omega_j \eta_l = \Delta_{l,1} \omega_j \omega_1 + \Delta_{l,2} \omega_j \omega_2 + \ldots + \Delta_{l,m} \omega_j \omega_m$$

даетъ

$$\Delta (\text{м. о. } \omega_j \eta_l) = \Delta_{l,1} (\text{м. о. } \omega_j \omega_1) + \ldots + \Delta_{l,m} (\text{м. о. } \omega_j \omega_m)$$
$$= k \{ G_{j,1} \Delta_{l,1} + G_{j,2} \Delta_{l,2} + \ldots + G_{j,m} \Delta_{l,m} \}.$$

Отсюда заключаемъ, что математическія ожиданія произведеній

$$\omega_1 \eta_1, \ \omega_2 \eta_2, \ldots, \ \omega_m \eta_m$$

равны k, математическія же ожиданія другихъ произведеній

$$\omega_j \eta_l,$$

гдѣ j отлично отъ l, равны нулю; ибо

$$G_{l,1} \Delta_{l,1} + G_{l,2} \Delta_{l,2} + \ldots + G_{l,m} \Delta_{l,m} = \Delta$$

и

$$G_{j,1} \Delta_{l,1} + G_{j,2} \Delta_{l,2} + \ldots + G_{j,m} \Delta_{l,m} = 0,$$

если j не равно l. На этомъ основаніи изъ формулы

$$\Delta\eta_l \eta_i = \Delta_{l,1} \omega_1 \eta_i + \Delta_{l,2} \omega_2 \eta_i + \ldots + \Delta_{l,m} \omega_m \eta_i$$

выводимъ

$$\Delta (\text{м. о. } \eta_l \eta_i) = \Delta_{l,1} (\text{м. о. } \omega_1 \eta_i) + \ldots + \Delta_{l,m} (\text{м. о. } \omega_m \eta_i)$$
$$= k\Delta_{l,i}$$

и въ частности

$$(26) \qquad \text{м. о. } \eta_l \eta_l = \text{м. о. } (\xi_l - a_l)^2 = k \frac{\Delta_{l,l}}{\Delta}$$

Итакъ математическое ожиданіе квадрата погрѣшности приближеннаго равенства

$$a_l \doteq a_l^0$$

выражается произведеніемъ

$$k \frac{\Delta_{l,l}}{\Delta};$$

иначе сказать, вѣсъ равенства

$$a_l \doteq a_l^0$$

выражается дробью

$$\frac{\Delta}{\Delta_{l,l}},$$

что было найдено и другимъ путемъ.

Обращаясь къ выраженію

$$W = \Sigma p (A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + \dots + A_m \xi_m - u)^2,$$

прежде всего распространимъ принятое нами обозначеніе на другія суммы, аналогичныя W; именно сумму

$$f(p', A'_1, \dots, A'_m, u', c') + f(p'', A''_1, \dots, A''_m, u'', c'') + \\ + \dots + f(p^{(n)}, A_1^{(n)}, \dots, A_m^{(n)}, u^{(n)}, c^{(n)})$$

будемъ для краткости изображать такъ

$$\Sigma f(p, A_1, A_2, \dots, A_m, u, c)$$

для любой функціи

$$f(p, A_1, A_2, \dots, A_m, u, c)$$

перемѣнныхъ

$$p, A_1, A_2, \dots, A_m, u, c,$$

при чемъ

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, a_1, a_2, \dots, a_m$$

могутъ играть роль постоянныхъ.

Далѣе замѣтимъ, что въ силу равенства

$$c^{(j)} = A_1^{(j)} a_1 + A_2^{(j)} a_2 + \dots + A_m^{(j)} a_m$$

должно быть

$$A_1^{(j)}\xi_1+A_2^{(j)}\xi_2+\ldots+A_m^{(j)}\xi_m-u^{(j)}=A_1^{(j)}\eta_1+\ldots+A_m^{(j)}\eta_m-v^{(j)}.$$

Поэтому W совпадаетъ съ суммою

$$\Sigma p(A_1\eta_1+A_2\eta_2+\ldots+A_m\eta_m-v)^2.$$

Съ другой стороны, простыя выкладки даютъ

$$\begin{aligned}&\Sigma p(A_1\eta_1+A_2\eta_2+\ldots+A_m\eta_m-v)^2\\ &=\eta_1\Sigma pA_1(A_1\eta_1+A_2\eta_2+\ldots+A_m\eta_m-v)+\\ &\quad+\ldots+\eta_m\Sigma pA_m(A_1\eta_1+\ldots+A_m\eta_m-v)\\ &\quad-\Sigma pv(A_1\eta_1+\ldots+A_m\eta_m-v)\\ &=-\Sigma pv(A_1\eta_1+A_2\eta_2+\ldots+A_m\eta_m-v)\\ &=\Sigma pv^2-\eta_1\Sigma pA_1v-\eta_2\Sigma pA_2v-\ldots-\eta_m\Sigma pA_mv\\ &=\Sigma pv^2-\eta_1\omega_1-\eta_2\omega_2-\ldots-\eta_m\omega_m;\end{aligned}$$

ибо каждая изъ суммъ

$$\begin{aligned}&\Sigma pA_1(A_1\eta_1+A_2\eta_2+\ldots+A_m\eta_m-v),\\ &\Sigma pA_2(A_1\eta_1+A_2\eta_2+\ldots+A_m\eta_m-v),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\Sigma pA_m(A_1\eta_1+A_2\eta_2+\ldots+A_m\eta_m-v)\end{aligned}$$

равна нулю. Слѣдовательно

$$W=\Sigma pv^2-\eta_1\omega_1-\eta_2\omega_2-\ldots-\eta_m\omega_m$$

и

$$\begin{aligned}\text{м. о. } W&=\Sigma\text{ м. о. } pv^2-\text{м. о. }\eta_1\omega_1-\text{м. о. }\eta_2\omega_2-\ldots-\text{м. о. }\eta_m\omega_m\\ &=(n-m)k,\end{aligned}$$

такъ какъ математическое ожиданіе каждаго изъ произведеній

$$p'v'v',\ldots,p^{(n)}v^{(n)}v^{(n)},\ \eta_1\omega_1,\ \eta_2\omega_2,\ldots,\ \eta_m\omega_m$$

равно числу k. Формула

(27) $$\text{м. о. } W=(n-m)k$$

служитъ основаніемъ для приближеннаго равенства

$$k = \frac{W^0}{n-m};$$

она показываетъ, что это приближенное равенство свободно отъ постоянной погрѣшности, при чемъ W^0 по прежнему означаетъ сумму

$$p'(A_1' a_1^0 + A_2' a_2^0 + \ldots + A_m' a_m^0 - b')^2 + p''(A_1'' a_1^0 + \ldots + A_m'' a_m^0 - b'')^2$$
$$+ \ldots + p^{(n)}(A_1^{(n)} a_1^0 + \ldots + A_m^{(n)} a_m^0 - b^{(n)})^2.$$

Выраженіе W^0 содержитъ кромѣ данныхъ элементовъ только количества

$$a_1^0,\ a_2^0, \ldots,\ a_m^0,$$

которыя могутъ быть найдены изъ уравненій (25).

Слѣдовательно величину W^0 можно вычислить въ каждомъ частномъ случаѣ и потому, пользуясь равенствомъ

$$k = \frac{W^0}{n-m},$$

мы имѣемъ возможность найти приближенную величину k; и затѣмъ по формулѣ (26) можемъ найти приближенныя значенія математическихъ ожиданій квадратовъ погрѣшностей равенствъ

$$a_1 = a_1^0,\ a_2 = a_2^0, \ldots,\ a_m = a_m^0,$$

доставленныхъ способомъ наименьшихъ квадратовъ.

Наконецъ, если въ томъ встрѣчается надобность, можемъ разсматривать и вѣроятности различныхъ предположеній о величинѣ погрѣшности любого изъ равенствъ

$$a_1 = a_1^0,\ a_2 = a_2^0, \ldots,\ a_m = a_m^0$$

на основаніи соображеній, установленныхъ нами выше, когда рѣчь шла о случаѣ одного неизвѣстнаго.

§ 43. Положимъ теперь, что сверхъ данныхъ и условій, допущенныхъ въ § 41, намъ извѣстно нѣсколько зависимостей между $a_1, a_2, \ldots, a_m$. И подобно тому какъ раньше мы предполагали линейными, относительно $a_1, a_2, \ldots, a_m$, тѣ выраже-

нія, приближенныя величины которыхъ доставлены наблюденіями, будемъ предполагать линейными, относительно $a_1, a_2, \ldots, a_m$, и тѣ выраженія, точныя величины которыхъ намъ извѣстны помимо наблюденій.

Такое предположеніе обыкновенно оправдываютъ тѣмъ соображеніемъ, что способъ наименьшихъ квадратовъ употребляется для разысканія малыхъ поправокъ въ найденныхъ, такъ или иначе, приближенныхъ величинахъ неизвѣстныхъ. Въ виду предполагаемой малости чиселъ $a_1, a_2, \ldots, a_m$ пренебрегаютъ ихъ степенями выше первой, равно какъ и произведеніями ихъ, и такимъ образомъ всѣ выраженія, содержащія эти числа, сводятъ къ линейнымъ.

Не настаивая на законности приведеннаго соображенія, замѣтимъ, что предположеніе о линейномъ видѣ всѣхъ выраженій, величины которыхъ доставляются наблюденіями или извѣстны помимо наблюденій, принадлежитъ къ числу основныхъ, и нарушеніе его лишило бы насъ возможности обосновать способъ наименьшихъ квадратовъ на вышеуказанныхъ началахъ.

Пусть, кромѣ приближенныхъ равенствъ

$$A'_1\, a_1 + A'_2\, a_2 + \ldots + A'_m\, a_m \doteq b',$$

$$A''_1\, a_1 + A''_2\, a_2 + \ldots + A''_m\, a_m \doteq b'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A^{(n)}_1 a_1 + A^{(n)}_2 a_2 + \ldots + A^{(n)}_m a_m \doteq b^{(n)},$$

мы имѣемъ ν вполнѣ точныхъ равенствъ

$$D'_1\, a_1 + D'_2\, a_2 + \ldots + D'_m\, a_m = \partial',$$

$$D''_1\, a_1 + D''_2\, a_2 + \ldots + D''_m\, a_m = \partial'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D^{(\nu)}_1 a_1 + D^{(\nu)}_2 a_2 + \ldots + D^{(\nu)}_m a_m = \partial^{(\nu)},$$

гдѣ D и ∂, съ разными значками, числа данныя.

Вмѣстѣ съ тѣмъ положимъ, что на основаніи послѣднихъ

равенствъ количества

$$a_1,\ a_2, \ldots, a_\nu$$

можно выразить черезъ

$$a_{\nu+1},\ a_{\nu+2}, \ldots, a_m.$$

Тогда, пользуясь выраженіемъ однихъ количествъ черезъ другія и исключая на этомъ основаніи

$$a_1,\ a_2, \ldots, a_\nu,$$

мы можемъ уменьшить число неизвѣстныхъ.

Такимъ образомъ каждая изъ суммъ

$$A_1^{(i)} a_1 + A_2^{(i)} a_2 + \ldots + A_m^{(i)} a_m$$

преобразуется въ равную ей сумму вида

$$B_{\nu+1}^{(i)} a_{\nu+1} + B_{\nu+2}^{(i)} a_{\nu+2} + \ldots + B_m^{(i)} a_m + B^{(i)},$$

гдѣ коэффиціенты

$$B_{\nu+1}^{(i)},\ B_{\nu+2}^{(i)}, \ldots, B_m^{(i)},\ B^{(i)}$$

вполнѣ опредѣляются нашими данными. Вмѣстѣ съ тѣмъ разысканіе приближенныхъ значеній m неизвѣстныхъ

$$a_1,\ a_2, \ldots, a_m$$

будетъ сведено къ разысканію приближенныхъ значеній $m-\nu$ количествъ

$$a_{\nu+1},\ a_{\nu+2}, \ldots, a_m,$$

изъ n приближенныхъ уравненій

$$B'_{\nu+1} a_{\nu+1} + \ldots + B'_m a_m \doteqdot b' - B',$$

$$B''_{\nu+1} a_{\nu+1} + \ldots + B''_m a_m \doteqdot b'' - B'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$B^{(n)}_{\nu+1} a_{\nu+1} + \ldots + B^{(n)}_m a_m \doteqdot b^{(n)} - B^{(n)}.$$

И мы можемъ обратиться къ разсужденіямъ предыдущихъ параграфовъ, если только указанными уравненіями исчерпываются всѣ извѣстныя намъ соотношенія между неизвѣстными

$$a_1,\ a_2, \ldots, a_m,$$

такъ какъ въ этомъ случаѣ между числами

$$a_{\nu+1},\ a_{\nu+2}, \ldots, a_m$$

не будетъ никакихъ извѣстныхъ намъ соотношеній.

Послѣ такого уменьшенія числа неизвѣстныхъ мы найдемъ, по изложеннымъ выше способамъ, для неизвѣстныхъ

$$a_{\nu+1},\ a_{\nu+2}, \ldots, a_m$$

приближенныя величины

$$a^0_{\nu+1},\ a^0_{\nu+2}, \ldots, a^0_m,$$

которымъ будетъ соотвѣтствовать наименьшая величина суммы

$$\Sigma p\,(B_{\nu+1}\,a^0_{\nu+1} + B_{\nu+2}\,a^0_{\nu+2} + \ldots + B_m\,a^0_m + B - b)^2,$$

равной

$$p'\,(B'_{\nu+1}\,a^0_{\nu+1} + B'_{\nu+2}\,a^0_{\nu+2} + \ldots + B'_m\,a^0_m + B' - b')^2 + \ldots$$
$$+ p^{(n)}\,(B^{(n)}_{\nu+1}\,a^0_{\nu+1} + B^{(n)}_{\nu+2}\,a^0_{\nu+2} + \ldots + B^{(n)}_m\,a^0_m + B^{(n)} - b^{(n)})^2.$$

Для остальныхъ же неизвѣстныхъ

$$a_1,\ a_2, \ldots, a_\nu$$

мы найдемъ ихъ приближенныя величины

$$a^0_1,\ a^0_2, \ldots, a^0_\nu,$$

подставляя въ выраженія этихъ неизвѣстныхъ черезъ

$$a_{\nu+1},\ a_{\nu+2}, \ldots, a_m$$

вмѣсто послѣднихъ чиселъ ихъ приближенныя величины

$$a^0_{\nu+1},\ a^0_{\nu+2}, \ldots, a^0_m.$$

Найденная такимъ образомъ система приближенныхъ значеній неизвѣстныхъ

$$a_1,\ a_2, \ldots, a_m$$

удовлетворитъ всѣмъ уравненіямъ

$$D'_1 a_1^0 + D'_2 a_2^0 + \ldots + D'_m a_m^0 = \partial',$$

. . . .

$$D_1^{(\nu)} a_1^0 + D_2^{(\nu)} a_2^0 + \ldots + D_m^{(\nu)} a_m^0 = \partial^{(\nu)}.$$

Но для всякой системы чиселъ

$$a_1^0,\ a_2^0, \ldots,\ a_m^0,$$

которая удовлетворяетъ этимъ уравненіямъ должно быть

$$A_1^{(i)} a_1^0 + A_2^{(i)} a_2^0 + \ldots + A_m^{(i)} a_m^0 = B_{\nu+1}^{(i)} a_{\nu+1}^0 + \ldots + B_m^{(i)} a_m^0 + B^{(i)}$$

и потому сумма

$$\Sigma p\,(B_{\nu+1} a_{\nu+1}^0 + \ldots + B_m a_m^0 + B - b)^2$$

одинакова съ суммою

$$\Sigma p\,(A_1 a_1^0 + A_2 a_2^0 + \ldots + A_m a_m^0 - b)^2.$$

Отсюда нетрудно заключить, что найденная нами система чиселъ

$$a_1^0,\ a_2^0, \ldots,\ a_m^0,$$

представляющихъ приближенныя величины $a_1, a_2, \ldots a_m$, отличается отъ всякой другой системы чиселъ

$$a_1^0,\ a_2^0, \ldots,\ a_m^0,$$

которая удовлетворяетъ извѣстнымъ намъ уравненіямъ, наименьшею величиною суммы

$$\Sigma p\,(A_1 a_1^0 + A_2 a_2^0 + \ldots + A_m a_m^0 - b)^2.$$

Для лучшаго выясненія изложенныхъ нами пріемовъ разсмотримъ слѣдующій вопросъ практической геометріи.

Въ прямолинейномъ трехугольникѣ EFG нѣсколько разъ измѣрены всѣ его углы, и получено для угла E, въ градусахъ, r приближенныхъ значеній

$$E',\ E'', \ldots,\ E^{(r)},$$

для угла F, въ градусахъ, s приближенныхъ значеній

$$F',\ F'', \ldots,\ F^{(s)}$$

и для угла G, въ градусахъ, t приближенныхъ значеній

$$G',\ G'',\ldots.,\ G^{(t)}.$$

Всѣ измѣренія мы предполагаемъ независимыми и свободными отъ постоянныхъ ошибокъ. Придавая сверхъ того одинаковый вѣсъ всѣмъ измѣреніямъ одного и того же угла, мы получимъ согласно изложенному способу для E, F, G слѣдующія приближенныя величины

$$\frac{E'+E''+\ldots.+E^{(r)}}{r},\quad \frac{F'+F''+\ldots.+F^{(s)}}{s},\quad \frac{G'+G''+\ldots.+G^{(t)}}{t},$$

если только оставимъ въ сторонѣ соотношеніе

$$E+F+G=180.$$

Если же желаемъ принять во вниманіе это соотношеніе, то найденныя нами числа

$$\frac{E'+E''+\ldots.+E^{(r)}}{r},\quad \frac{F'+F''+\ldots.+F^{(s)}}{s},\quad \frac{G'+G''+\ldots.+G^{(t)}}{t},$$

которыя условимся обозначать для краткости символами

$$\overline{E},\ \overline{F},\ \overline{G},$$

должно, въ силу изложенныхъ нами правилъ, замѣнить другими.

Эти другія приближенныя значенія чиселъ E, F, G обозначимъ символами

$$E^0,\ F^0,\ G^0;$$

разности же

$$E^0-\overline{E},\ F^0-\overline{F},\ G^0-\overline{G}$$

назовемъ поправками первыхъ приближенныхъ значеній и обозначимъ символами

$$\delta(E),\ \delta(F),\ \delta(G).$$

Числа

$$E^0,\ F^0,\ G^0$$

вмѣстѣ съ поправками

$$\delta(E),\ \delta(F),\ \delta(G)$$

получатъ опредѣленный смыслъ только послѣ того, какъ мы установимъ опредѣленныя отношенія между вѣсами измѣреній, относящихся къ различнымъ угламъ E, F, G.

Устанавливая различнымъ образомъ эти отношенія, мы, естественно, можемъ получить совершенно различные результаты.

Здѣсь мы приведемъ двѣ системы поправокъ

$$\delta(E),\ \delta(F),\ \delta(G).$$

Для полученія первой системы припишемъ всѣмъ измѣреніямъ одинаковый вѣсъ.

При такомъ условіи искомая нами система чиселъ

$$E^0,\ F^0,\ G^0$$

должна отличаться отъ всѣхъ другихъ системъ чиселъ

$$E^0,\ F^0,\ G^0,$$

удовлетворяющихъ уравненію

$$E^0 + F^0 + G^0 = 180,$$

наименьшею величиною суммы

$$\begin{aligned}(E^0 - E')^2 &+ (E^0 - E'')^2 + \ldots + (E^0 - E^{(r)})^2\\ + (F^0 - F')^2 &+ (F^0 - F'')^2 + \ldots + (F^0 - F^{(s)})^2\\ + (G^0 - G')^2 &+ (G^0 - G'')^2 + \ldots + (G^0 - G^{(t)})^2.\end{aligned}$$

Это требованіе выражается системой уравненій

$$E^0 + F^0 + G^0 = 180$$

$$rE^0 - E' - E'' .. - E^{(r)} = sF^0 - F' - F'' .. - F^{(s)} = tG^0 - G' - G'' .. - G^{(t)},$$

откуда безъ большого труда выводимъ

$$\frac{E^0 - \overline{E}}{\frac{1}{r}} = \frac{F^0 - \overline{F}}{\frac{1}{s}} = \frac{G^0 - \overline{G}}{\frac{1}{t}} = \frac{180 - (\overline{E} + \overline{F} + \overline{G})}{\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t}},$$

или, что все равно,

$$\frac{\delta(E)}{\frac{1}{r}} = \frac{\delta(F)}{\frac{1}{s}} = \frac{\delta(G)}{\frac{1}{t}} = \frac{180 - (\overline{E} + \overline{F} + \overline{G})}{\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t}}.$$

Итакъ, если всѣмъ измѣреніямъ угловъ

$$E,\ F,\ G$$

мы приписываемъ одинъ и тотъ же вѣсъ, то поправки

$$\delta(E),\ \delta(F),\ \delta(G)$$

первыхъ приближенныхъ величинъ

$$\overline{E}=\frac{E'+E''+\ldots+E^{(r)}}{r},\ \overline{F}=\frac{F'+\ldots+F^{(s)}}{s},\ \overline{G}=\frac{G'+G''+\ldots+G^{(t)}}{t}$$

этихъ угловъ представляютъ три части разности

$$180-(\overline{E}+\overline{F}+\overline{G})$$

обратно пропорціональныя числамъ

$$r,\ s,\ t.$$

Въ частности при

$$r=s=t$$

имѣемъ

$$\delta(E)=\delta(F)=\delta(G)=\frac{180-(\overline{E}+\overline{F}+\overline{G})}{3}.$$

Прежде чѣмъ заняться другой системой поправокъ, примѣнимъ формулы предыдущаго параграфа къ оцѣнкѣ достоинства приближенныхъ равенствъ

$$E \doteq E^0,\ F \doteq F^0,\ G \doteq G^0.$$

Для этой цѣли исключимъ число G, замѣнивъ его разностью

$$180-(E+F);$$

такъ что измѣренія угла G будутъ доставлять намъ приближенныя величины разности

$$180-(E+F).$$

Въ данномъ случаѣ выраженіе W^0 предыдущаго параграфа приводится къ суммѣ

$$(E^0-E')^2+(E^0-E'')^2+\ldots+(E^0-E^{(r)})^2$$
$$+(F^0-F')^2+(F^0-F'')^2+\ldots+(F^0-F^{(s)})^2$$
$$+(E^0+F^0-180+G')^2+\ldots+(E^0+F^0-180+G^{(t)})^2,$$

если одинаковые, по предположенію, вѣса измѣреній мы приравняемъ единицѣ. Соотвѣтственно этому система (25) приведется

къ двумъ уравненіямъ

$$(r+t)E^0+tF^0=r\overline{E}+t(180-\overline{G}),$$
$$tE^0+(s+t)F^0=s\overline{F}+t(180-\overline{G}),$$

и количества

$$\Delta,\ \Delta_{1,1} \text{ и } \Delta_{2,2}$$

опредѣлятся равенствами

$$\Delta=\begin{vmatrix} r+t, & t \\ t, & s+t \end{vmatrix}=rs+rt+st,\ \Delta_{1,1}=s+t,\ \Delta_{2,2}=r+t.$$

Отсюда слѣдуетъ, что вѣсъ равенства

$$E \mp E^0$$

выражается дробью

$$\frac{rs+rt+st}{s+t},$$

а вѣсъ равенства

$$F \mp F^0$$

выражается дробью

$$\frac{rs+rt+st}{r+t};$$

и по аналогіи не трудно заключить, что вѣсъ равенства

$$G \mp G^0$$

долженъ выразиться дробью

$$\frac{rs+rt+st}{r+s}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда

$$r=s=t,$$

вѣса всѣхъ равенствъ

$$E \mp E^0,\ F \mp F^0,\ G \mp G^0$$

оказываются равными

$$\frac{3r}{2},$$

т. е. половинѣ числа всѣхъ измѣреній.

Наконецъ число k, выражающее математическое ожиданіе квадрата погрѣшности каждаго изъ начальныхъ равенствъ

$$E \mp E',\ldots,\ E \mp E^{(r)},\ F \mp F',\ldots,\ F \mp F^{(s)},\ G \mp G',\ldots,\ G \mp G^{(t)},$$

вычисляется, съ неизвѣстною погрѣшностью, изъ равенства

$$(r+s+t-2)k = \left\{ \begin{array}{l} (E^0-E')^2+(E^0-E'')^2+\ldots.+(E^0-E^{(r)})^2 \\ +(F^0-F')^2+(F^0-F'')^2+\ldots.+(F^0-F^{(s)})^2 \\ +(G^0-G')^2+(G^0-G'')^2+\ldots.+(G^0-G^{(t)})^2. \end{array} \right.$$

Другая система поправокъ

$$\delta(E),\ \delta(F),\ \delta(G),$$

которую мы сейчасъ укажемъ, относится къ тому случаю, когда возникаетъ сомнѣніе, не слѣдуетъ ли измѣреніямъ различныхъ угловъ приписывать различные вѣса.

Тогда для сравнительной оцѣнки достоинствъ различныхъ измѣреній угловъ мы можемъ попробовать найти для каждаго угла, въ отдѣльности, приближенную величину математическаго ожиданія квадрата погрѣшности его измѣреній. А именно, согласно приведеннымъ выше объясненіямъ, мы можемъ признать число

$$k_1 = \frac{(\overline{E}-E')^2+(\overline{E}-E'')^2+\ldots.+(\overline{E}-E^{(r)})^2}{r-1}$$

за приближенную величину математическаго ожиданія квадрата погрѣшности каждаго изъ измѣреній угла E, число

$$k_2 = \frac{(\overline{F}-F')^2+(\overline{F}-F'')^2+\ldots.+(\overline{F}-F^{(s)})^2}{s-1}$$

за приближенную величину математическаго ожиданія квадрата погрѣшности каждаго изъ измѣреній угла F, и наконецъ число

$$k_3 = \frac{(\overline{G}-G')^2+(\overline{G}-G'')^2+\ldots.+(\overline{G}-G^{(t)})^2}{t-1}$$

за приближенную величину математическаго ожиданія квадрата погрѣшности каждаго изъ измѣреній угла G.

Если числа k_1, k_2, k_3 мало отличаются другъ отъ друга, то ихъ разсмотрѣніе можетъ служить нѣкоторымъ подтвержденіемъ прежняго предположенія, согласно которому всѣмъ измѣреніямъ мы приписывали одинаковый вѣсъ. Если же числа k_1, k_2, k_3 значительно разнятся другъ отъ друга, то вмѣсто предположенія

равенства вѣсовъ всѣхъ измѣреній можно признать болѣе правильнымъ предположеніе, что числа k_1, k_2, k_3 служатъ вѣрною мѣрою вышеупомянутыхъ математическихъ ожиданій.

При такомъ предположеніи вѣса измѣреній угловъ E, F, G можно соотвѣтственно приравнять дробямъ

$$\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \frac{1}{k_3}.$$

Тогда искомая система чиселъ E^0, F^0, G^0 будетъ отличаться отъ всякой другой системы чиселъ E^0, F^0, G^0, которая удовлетворяетъ уравненію

$$E^0 + F^0 + G^0 = 180,$$

наименьшимъ значеніемъ суммы

$$\frac{1}{k_1}(E^0 - E')^2 + \ldots + \frac{1}{k_1}(E^0 - E^{(r)})^2 + \frac{1}{k_2}(F^0 - F')^2 + \ldots$$
$$+ \frac{1}{k_2}(F^0 - F^{(s)})^2 + \frac{1}{k_3}(G^0 - G')^2 + \ldots + \frac{1}{k_3}(G^0 - G^{(t)})^2.$$

Это требованіе выражается уравненіями

$$\frac{rE^0 - E' - E'' - \ldots - E^{(r)}}{k_1} = \frac{sF^0 - F' - F'' - \ldots - F^{(s)}}{k_2} = \frac{tG^0 - G' - G'' - \ldots - G^{(t)}}{k_3};$$

изъ которыхъ, въ связи съ уравненіемъ

$$E^0 + F^0 + G^0 = 180,$$

безъ труда выводимъ

$$\frac{\delta(E)}{\frac{k_1}{r}} = \frac{\delta(F)}{\frac{k_2}{s}} = \frac{\delta(G)}{\frac{k_3}{t}} = \frac{180 - (\overline{E} + \overline{F} + \overline{G})}{\frac{k_1}{r} + \frac{k_2}{s} + \frac{k_3}{t}}.$$

Пользуясь затѣмъ для опредѣленія вѣсовъ равенствъ

$$E \mp E^0, \quad F \mp F^0, \quad G \mp G^0$$

тѣмъ же пріемомъ, какой мы примѣнили раньше, найдемъ, что теперь эти вѣса соотвѣтственно равны

$$\frac{rsk_3 + rtk_2 + stk_1}{k_1(sk_3 + tk_2)}, \quad \frac{rsk_3 + rtk_2 + stk_1}{k_2(rk_3 + tk_1)}, \quad \frac{rsk_3 + rtk_2 + stk_1}{k_3(rk_2 + sk_1)}.$$

Литература.

Gauss. Méthode des moindres carrés, traduit par J. Bertrand.

Encke. Ueber die Methode der kleinsten Quadrate (Berl. Astr. Jahrbuch. 1834, 1835, 1836).

Bienaymé. Sur la probabilité des erreurs d'après la méthode des moindres carrés (Jour. de Liouville, T. XVII, 1852).

Glaisher. On the law of facility of errors of observations and on the method of least squares (Mem. of the R. Astr. Soc., XXXIX).

P. Pizzetti. I Fondamenti Matematici per la critica dei resultati sperimentali. Genova 1892.

М. Маіевскій. Изложеніе способа наименьшихъ квадратовъ и примѣненія его преимущественно къ изслѣдованію результатовъ стрѣльбы.

И. Слешинскій. Къ теоріи способа наименьшихъ квадратовъ. Одесса. 1892.

Н. Цингеръ. Курсъ астрономіи (часть теоретическая).

Helmert. Ausgleichungs-rechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 2 Aufl. 1907.

S. Wellisch. Theorie und Praxis der Ausgleichungsrechnung. 1909.

R. Suppantschitsch. Zur Axiomatik der Methode der kleinsten Quadrate (Sitzungsberichte der kais. Akad. d. Wis. in Wien. Math.-nat. Kl.; Bd. CXXII, Abt. IIa. 1913).

ГЛАВА VIII.

О страхованіи жизни.

§ 44. Расчеты стоимостей различныхъ видовъ страхованія жизни основаны на нормѣ роста капитала и на таблицахъ смертности, служащихъ для исчисленія вѣроятностей тѣхъ или иныхъ предположеній о жизни и смерти людей; ибо эти расчеты связаны съ разсмотрѣніемъ суммъ, которыя должны быть выданы или получены въ различныя эпохи времени, въ зависимости отъ жизни или смерти опредѣленныхъ лицъ.

Посредствомъ извѣстнаго множителя, выражающаго ростъ капитала во времени, подобныя суммы приводятся къ одной эпохѣ, которую мы назовемъ основнымъ моментомъ времени.

Относя всѣ капиталы къ основному моменту, превращаютъ капиталъ A въ

$$\frac{A}{(1+t)^n},$$

если полученіе или выдача капитала A послѣдуетъ черезъ n лѣтъ послѣ основного момента времени, при чемъ t означаетъ число постоянное и измѣряетъ годовой ростъ капитала.

Если же капиталъ A долженъ быть выданъ или полученъ за n лѣтъ до основного момента времени, то его превращаютъ въ

$$A(1+t)^n.$$

Такое приведеніе капиталовъ вытекаетъ изъ указаній практики; мы будемъ его придерживаться и при разсмотрѣніи математическихъ ожиданій прибыли, или убытка, предпріятій въ тѣхъ случаяхъ, когда убытки и прибыли предпріятій могутъ быть въ различные моменты времени. На этомъ основаніи нетрудно составить понятіе о математическомъ ожиданіи прибыли предпріятія, приведенной къ данному моменту времени. Послѣднее математическое ожиданіе, которое можно назвать стоимостью предпріятія, служитъ для рѣшенія вопроса о выгодности или невыгодности предпріятія, при разнообразіи моментовъ прибыли и убытка. Вмѣстѣ съ тѣмъ установленное раньше условіе безобидности игръ превращается въ требованіе, чтобы для каждаго игрока математическое ожиданіе прибыли, приведенной къ одному моменту времени, было нулемъ.

Вѣроятности, которыя намъ придется разсматривать, опредѣляются посредствомъ таблицъ смертности.

Изъ таблицъ смертности получается рядъ чиселъ

$$N_a, N_{a+1}, N_{a+2}, \ldots,$$

гдѣ N_{a+i+1} показываетъ, какое число лицъ доживаетъ до возраста $a+i+1$ лѣтъ изъ N_{a+i} лицъ, имѣющихъ возрастъ $a+i$ лѣтъ. Сообразно этому дробь

$$\frac{N_{a+i+1}}{N_{a+i}}$$

будетъ вѣроятностью лицу возраста $a+i$ лѣтъ дожить до $a+i+1$ лѣтъ, а дробь

$$\frac{N_{a+i}-N_{a+i+1}}{N_{a+i}}$$

выразитъ вѣроятность тому же лицу, возраста $a+i$ лѣтъ, умереть въ теченіи одного года. Далѣе не трудно заключить, что дробь

$$\frac{N_{a+i+n}}{N_{a+i}}$$

представитъ вѣроятность лицу возраста $a+i$ лѣтъ дожить до

$a+i+n$ лѣтъ, дроби же

$$\frac{N_{a+i}-N_{a+i+1}}{N_{a+i}},\ \frac{N_{a+i+1}-N_{a+i+2}}{N_{a+i}},\ \frac{N_{a+i+2}-N_{a+i+3}}{N_{a+i}},\ldots$$

представляютъ соотвѣтственно вѣроятности лицу возраста $a+i$ лѣтъ умереть въ возрастѣ
отъ $a+i$ до $a+i+1$ лѣтъ, отъ $a+i+1$ до $a+i+2$ лѣтъ, и т. д.

По числамъ

$$N_a,\ N_{a+1},\ N_{a+2},\ldots$$

составляется другой важный рядъ чиселъ

$$Q_a=\frac{N_a}{(1+t)^{\omega}},\quad Q_{a+1}=\frac{N_{a+1}}{(1+t)^{\omega+1}},\ldots,\quad Q_{a+i}=\frac{N_{a+i}}{(1+t)^{\omega+i}},\ldots,$$

гдѣ ω означаетъ нѣкоторое постоянное, напримѣръ a. Рядъ

$$Q_a,\ Q_{a+1},\ Q_{a+2},\ldots$$

состоитъ изъ конечнаго числа членовъ; складывая ихъ съ того или другого члена до послѣдняго, образуемъ третій рядъ чиселъ

$$\begin{aligned} S_a &= Q_{a+1}+Q_{a+2}+Q_{a+3}+\ldots \\ S_{a+1} &= \qquad\quad\ Q_{a+2}+Q_{a+3}+\ldots \\ S_{a+2} &= \qquad\qquad\qquad\ Q_{a+3}+\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Приведенными числами можно воспользоваться для рѣшенія слѣдующихъ задачъ, относящихся къ страхованію одного лица.

Задача 1ая. Опредѣлить стоимость единицы капитала, уплачиваемой лицу возраста с лѣтъ по достиженіи имъ возраста д лѣтъ, при чемъ эта стоимость должна быть отнесена къ тому моменту времени, когда вышеупомянутое лицо имѣетъ возрастъ с лѣтъ.

Искомая стоимость, какъ не трудно догадаться, выражается произведеніемъ

$$\frac{N_{д}}{N_c}\cdot\frac{1}{(1+t)^{д-c}},$$

которое равно отношенію

$$\frac{Q_{д}}{Q_c}.$$

Если найдется N_c лицъ, возраста c лѣтъ, и каждое изъ нихъ внесетъ въ общую кассу капиталъ

$$\frac{N_\partial}{N_c} \cdot \frac{1}{(1+t)^{\partial - c}},$$

то составится сумма

$$\frac{N_\partial}{(1+t)^{\partial - c}},$$

которая черезъ $\partial - c$ лѣтъ превратится въ

$$N_\partial,$$

если сохранится принятый нами размѣръ роста капитала.

Съ другой стороны, если эти N_c лицъ будутъ вымирать согласно принятой нами таблицѣ смертности, то къ моменту расплаты изъ нихъ останется въ живыхъ N_∂ лицъ, которыя и могутъ получить по одной единицѣ капитала изъ общей кассы, содержащей N_∂ единицъ капитала. Это разсужденіе подтверждаетъ вѣрность найденнаго нами числа

$$\frac{N_\partial}{N_c} \cdot \frac{1}{(1+t)^{\partial - c}} = \frac{Q_\partial}{Q_c}.$$

Задача 2^ая^. Лицо возраста с лѣтъ желаетъ получать ежегодную постоянную пенсію А, начиная съ момента достиженія имъ возраста с + і лѣтъ до смерти.

Опредѣлить, какою суммою X оцѣнивается эта пенсія въ моментъ, когда вышеуказанное лицо имѣетъ с лѣтъ.

Предположимъ, что ежегодная пенсія A не распредѣляется по частямъ года, а выдается вся цѣликомъ, и сообразно этому отнесемъ ежегодную пенсію A къ тѣмъ моментамъ времени, когда разсматриваемое лицо будетъ послѣдовательно достигать возрастовъ

$$c+i \text{ лѣтъ}, \quad c+i+1 \text{ лѣтъ}, \quad c+i+2 \text{ лѣтъ}, \ldots.$$

При такомъ предположеніи получимъ, на основаніи рѣшенія предыдущей задачи, рядъ послѣдовательныхъ стоимостей

$$\frac{Q_{c+i}}{Q_c} A, \quad \frac{Q_{c+i+1}}{Q_c} A, \quad \frac{Q_{c+i+2}}{Q_c} A, \ldots,$$

сумма которыхъ

$$\frac{Q_{c+i} + Q_{c+i+1} + Q_{c+i+2} + \ldots}{Q_c} A$$

выразитъ искомую величину X; слѣдовательно

$$\frac{X}{A} = \frac{S_{c+i-1}}{Q_c}.$$

Найденная нами величина X можетъ быть разсматриваема какъ нормальная сумма, которую должно потребовать страховое учрежденіе отъ лица возраста c за предоставленіе ему права на ежегодную пенсію A, если выдача пенсіи начинается съ момента достиженія вышеупомянутымъ лицомъ возраста $c+i$ и продолжается до смерти этого лица.

Задача 3ья. Найти, какую сумму Y должно потребовать страховое учрежденіе за предоставленіе, наслѣдникамъ лица возраста c, права получить сумму A въ моментъ смерти этого лица. Другими словами, требуется опредѣлить стоимость этого права, когда застрахованное лицо находится въ живыхъ и имѣетъ возрастъ c лѣтъ.

Для упрощенія вопроса пріурочимъ предстоящую смерть застрахованнаго лица къ тѣмъ моментамъ, когда оно достигаетъ возрастовъ

c лѣтъ, $c+1$ лѣтъ, $c+2$ лѣтъ, и т. д.,

считая, что въ случаѣ, если смерть лица послѣдуетъ между возрастомъ $c+i$ и $c+i+1$ лѣтъ, его наслѣдники получатъ сумму A уже въ тотъ моментъ, когда возрастъ этого лица будетъ равенъ $c+i$ годамъ. Такое предположеніе, значительно упрощающее расчетъ, преувеличиваетъ, до нѣкоторой степени, искомую стоимость. Чтобы получить затѣмъ величину меньшую, чѣмъ искомая стоимость, достаточно подвинуть на годъ всѣ моменты послѣдовательныхъ выдачъ, что введетъ только простой дѣлитель $1+t$.

Останавливаясь на вышеуказанномъ предположеніи, станемъ разсматривать пожизненное страхованіе лица какъ совокупность

годовыхъ страхованій:

на случай смерти въ возрастѣ отъ c до $c+1$ лѣтъ,

на случай смерти въ возрастѣ отъ $c+1$ до $c+2$ лѣтъ, и т. д.

Стоимости этихъ годовыхъ страхованій, отнесенныя къ моменту времени, когда застрахованное лицо имѣетъ возрастъ c, выразятся произведеніями

$$\frac{N_c-N_{c+1}}{N_c}A,\quad \frac{N_{c+1}-N_{c+2}}{N_c}\cdot\frac{A}{1+t},\quad \frac{N_{c+2}-N_{c+3}}{N_c}\cdot\frac{A}{(1+t)^2},\ldots.$$

Отсюда заключаемъ, что искомая величина Y, нѣсколько преувеличенная, можетъ быть представлена въ видѣ суммы

$$\frac{N_c-N_{c+1}}{N_c}A+\frac{N_{c+1}-N_{c+2}}{N_c}\cdot\frac{A}{1+t}+\frac{N_{c+2}-N_{c+3}}{N_c}\cdot\frac{A}{(1+t)^2}+\ldots,$$

которая легко приводится къ

$$A-t\frac{Q_{c+1}+Q_{c+2}+Q_{c+3}+\ldots}{Q_c}A=A-t\frac{S_c}{Q_c}A.$$

Этотъ результатъ, на основаніи рѣшенія предыдущей задачи, можетъ быть истолкованъ въ томъ смыслѣ, что наслѣдники, получая капиталъ A только послѣ смерти застрахованнаго лица, лишаются, во все время его жизни, процентовъ съ этого капитала. Если раздѣлимъ найденную величину

$$A\left(1-t\frac{S_c}{Q_c}\right)$$

на $1+t$, то получимъ величину

$$\frac{A}{1+t}\left(1-t\frac{S_c}{Q_c}\right),$$

которая, согласно выше сказанному, будетъ меньше искомой стоимости Y. Наконецъ для достиженія большей точности можно пріурочить смерть застрахованнаго лица къ тѣмъ моментамъ, когда оно достигаетъ возрастовъ

$$c+\frac{1}{2}\text{ лѣтъ},\quad c+\frac{3}{2}\text{ лѣтъ},\quad c+\frac{5}{2}\text{ лѣтъ, и т. д.};$$

тогда получится для искомой стоимости Y третье значеніе

$$\frac{A}{\sqrt{1+t}}\left(1-t\frac{S_c}{Q_c}\right),$$

о которомъ уже нельзя будетъ сказать, превосходитъ ли оно Y или нѣтъ. Замѣтимъ, что мы имѣемъ здѣсь одинъ изъ тѣхъ важныхъ для практики случаевъ, когда существованіе искомой величины, въ строгомъ математическомъ смыслѣ, не можетъ быть установлено; поэтому въ данномъ случаѣ не можетъ быть и рѣчи о точной формулѣ. Усложняя выводы, можно создать иллюзію точности; но для устраненія этой иллюзіи, въ данномъ случаѣ, достаточно замѣтить, что таблицы смертности не принадлежатъ къ числу настоящихъ математическихъ таблицъ.

Задача 4ая. Лицо возраста с уплачиваетъ страховому учрежденію ежегодно сумму x, начиная съ момента достиженія возраста с до своей смерти, съ тѣмъ условіемъ, чтобы наслѣдникамъ этого лица была выдана сумма A тотчасъ послѣ его смерти. Опредѣлить нормальную величину отношенія $\frac{x}{A}$.

Согласно рѣшенію задачи 2ой стоимость всѣхъ суммъ, которыя уплатитъ застрахованное лицо страховому учрежденію, приводится для начала страхованія къ

$$\left(1+\frac{S_c}{Q_c}\right)x.$$

Съ другой стороны на основаніи рѣшенія задачи 3ей можно признать, что для того же момента времени стоимость суммы A, которую страховое учрежденіе должно будетъ уплатить наслѣдникамъ лица, приводится къ

$$\frac{A}{\sqrt{1+t}}\left(1-t\frac{S_c}{Q_c}\right).$$

Поэтому, на основаніи условія безобидности игръ, имѣемъ

$$\left(1+\frac{S_c}{Q_c}\right)x=\frac{A}{\sqrt{1+t}}\left(1-t\frac{S_c}{Q_c}\right),$$

откуда выводимъ

$$\frac{x}{A}=\frac{1}{\sqrt{1+t}}\cdot\frac{1-t\frac{S_c}{Q_c}}{1+\frac{S_c}{Q_c}}=\frac{1}{\sqrt{1+t}}\cdot\frac{Q_c-tS_c}{Q_c+S_c}.$$

§ 45. Переходя къ такимъ страхованіямъ, которыя обусловлены жизнью и смертью двухъ лицъ, положимъ для большей общности, что эти два лица принадлежатъ къ различнымъ категоріямъ людей, и что потому къ нимъ слѣдуетъ примѣнять различныя таблицы смертности.

Сохранимъ для одного лица прежній рядъ чиселъ

$$N_a,\ N_{a+1},\ N_{a+2},\ N_{a+3},\ldots$$

въ выше разъясненномъ смыслѣ; а для другого лица будемъ употреблять, въ томъ же смыслѣ, новый рядъ чиселъ

$$N'_a,\ N'_{a+1},\ N'_{a+2},\ N'_{a+3},\ldots$$

Тогда, если первое лицо имѣетъ возрастъ c лѣтъ, а второе возрастъ $д$ лѣтъ, то вѣроятность прожить имъ обоимъ i лѣтъ выразится произведеніемъ

$$\frac{N_{c+i}}{N_c}\cdot\frac{N'_{д+i}}{N'_д}.$$

При тѣхъ же условіяхъ вѣроятность, что первое лицо умретъ въ теченіе i лѣтъ, а второе останется въ живыхъ, представится произведеніемъ

$$\frac{N_c-N_{c+i}}{N_c}\cdot\frac{N'_{д+i}}{N'_д},$$

и вѣроятность, что второе лицо умретъ въ теченіе i лѣтъ, а первое останется въ живыхъ, представится произведеніемъ

$$\frac{N_{c+i}}{N_c}\cdot\frac{N'_д-N'_{д+i}}{N'_д}.$$

Наконецъ произведеніе

$$\frac{N_c-N_{c+i}}{N_c}\cdot\frac{N'_д-N'_{д+i}}{N'_д}$$

выразитъ вѣроятность, что оба лица умрутъ въ теченіе i лѣтъ.

Для рѣшенія нижеслѣдующихъ задачъ полезно ввести три системы чиселъ:

$$X_c=\frac{1}{N_c}\left\{\frac{N_{c+1}}{1+t}+\frac{N_{c+2}}{(1+t)^2}+\frac{N_{c+3}}{(1+t)^3}+\ldots\right\},$$

$$X'_\partial = \frac{1}{N'_\partial}\left\{\frac{N'_{\partial+1}}{1+t} + \frac{N'_{\partial+2}}{(1+t)^2} + \frac{N'_{\partial+3}}{(1+t)^3} + \ldots\right\},$$

$$X_{c,\partial} = \frac{N_{c+1}\,N'_{\partial+1}}{(1+t)\,N_c\,N'_\partial} + \frac{N_{c+2}\,N'_{\partial+2}}{(1+t)^2\,N_c\,N'_\partial} + \ldots,$$

гдѣ подъ буквами c и ∂ мы подразумѣваемъ любое изъ чиселъ

$$a,\ a+1,\ a+2,\ a+3, \ldots$$

Число

$$1 + X_c$$

представляетъ, на основаніи рѣшенія задачи 2ой, стоимость единицы капитала, уплачиваемой ежегодно первому лицу, или первымъ лицомъ, съ момента достиженія имъ возраста c до смерти, при чемъ эта стоимость отнесена къ моменту первой уплаты, когда вышеупомянутое лицо имѣетъ возрастъ c лѣтъ.

Подобный же смыслъ имѣетъ для второго лица число

$$1 + X'_\partial.$$

Что же касается числа

$$1 + X_{c,\partial},$$

то оно выражаетъ, какъ нетрудно убѣдиться, стоимость ежегодныхъ уплатъ единицы капитала, производимыхъ при условіи существованія въ живыхъ обоихъ разсматриваемыхъ нами лицъ, при чемъ эта стоимость, подобно предыдущимъ, относится къ моменту первой уплаты, который совпадаетъ съ моментами достиженія вышеупомянутыми лицами возрастовъ c лѣтъ и ∂ лѣтъ.

Задача 5ая. Лицо возраста c лѣтъ желаетъ, чтобы тотчасъ послѣ его смерти страховое учрежденіе выдало другому лицу, возраста ∂ лѣтъ, капиталъ A, если смерть перваго лица послѣдуетъ въ тотъ промежутокъ времени, когда его возрастъ будетъ заключаться между $c+i$ и $c+i+1$ годами. Опредѣлить стоимость этого капитала, приведенную къ моменту, когда первое лицо имѣетъ возрастъ c лѣтъ, а второе ∂ лѣтъ.

Если бы уплата капитала A не была обусловлена жизнью второго лица, то искомую стоимость можно было бы предста-

вить произведеніемъ

$$\frac{N_{c+i} - N_{c+i+1}}{N_c} \cdot \frac{1}{(1+t)^{i+\frac{1}{2}}},$$

на основаніи сказаннаго нами при рѣшеніи задачи 3ей.

Теперь же мы должны прибавить еще одинъ множитель, выражающій вѣроятность, что въ моментъ смерти перваго лица второе окажется въ живыхъ. Этотъ множитель лежитъ между

$$\frac{N'_{\partial+i}}{N'_{\partial}} \text{ и } \frac{N'_{\partial+i+1}}{N'_{\partial}},$$

ибо въ разсматриваемый моментъ смерти перваго лица возрастъ второго лица заключается между $\partial + i$ и $\partial + i + 1$ годами.

Допуская же, что въ моментъ смерти перваго лица возрастъ второго равенъ $\partial + i + \frac{1}{2}$, мы за вышеупомянутый множитель можемъ принять

$$\frac{N'_{\partial+i} + N'_{\partial+i+1}}{2N'_{\partial}}.$$

Итакъ за величину искомой стоимости можно считать произведеніе

$$\frac{N_{c+i} - N_{c+i+1}}{N_c} \cdot \frac{N'_{\partial+i} + N'_{\partial+i+1}}{2N'_{\partial}} \cdot \frac{1}{(1+t)^{i+\frac{1}{2}}}.$$

Этотъ результатъ послужитъ основаніемъ для дальнѣйшихъ нашихъ выводовъ.

Задача 6ая. Лицо возраста с вноситъ въ страховое учрежденіе капиталъ Y съ тѣмъ условіемъ, чтобы тотчасъ по смерти этого лица былъ выданъ капиталъ A другому лицу возраста д. Найти нормальную величину отношенія

$$\frac{Y}{A}.$$

Страхованіе, о которомъ идетъ рѣчь, можно разсматривать какъ совокупность годовыхъ страхованій, стоимость которыхъ мы только что опредѣлили. На этомъ основаніи нетрудно установить равенство

$$\frac{Y}{A} = \sum \frac{N_{c+i} - N_{c+i+1}}{N_c} \cdot \frac{N'_{\partial+i} + N'_{\partial+i+1}}{2N'_{\partial}} \cdot \frac{1}{(1+t)^{i+\frac{1}{2}}}.$$

где

$$i = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots.$$

Затѣмъ посредствомъ простыхъ преобразованій выводимъ

$$\frac{Y}{A}\sqrt{1+t} = \frac{1}{2}(1 - tX_{c,\partial}) - \frac{N_{c+1}}{2N_c}(1 + X_{c+1,\partial}) + \frac{N'_{\partial+1}}{2N'_\partial}(1 + X_{c,\partial+1}).$$

Задача 7ая. Лицо возраста с и другое лицо возраста д вносятъ въ страховое учрежденіе капиталъ Z съ тѣмъ условіемъ, чтобы тотчасъ по смерти кого нибудь изъ нихъ былъ выданъ капиталъ A оставшемуся въ живыхъ. Найти нормальную величину отношенія

$$\frac{Z}{A}.$$

На основаніи рѣшенія задачи 6ой произведеніе

$$\frac{Z}{A}\sqrt{1+t}$$

выражается суммою

$$\frac{1}{2}(1 - tX_{c,\partial}) - \frac{N_{c+1}}{2N_c}(1 + X_{c+1,\partial}) + \frac{N'_{\partial+1}}{2N'_\partial}(1 + X_{c,\partial+1})$$

$$+ \frac{1}{2}(1 - tX_{c,\partial}) - \frac{N'_{\partial+1}}{2N'_\partial}(1 + X_{c,\partial+1}) + \frac{N_{c+1}}{2N_c}(1 + X_{c+1,\partial}),$$

которая приводится къ $1 - tX_{c,\partial}$.

Этотъ результатъ можно вывести изъ того соображенія, что два лица, получая капиталъ A только послѣ смерти одного изъ нихъ, лишаются процентовъ съ капитала A во все время, пока они оба живы.

Задача 8ая. Лицо возраста с и другое лицо возраста д вносятъ ежегодно въ страховое учрежденіе капиталъ x, пока оба живы, съ тѣмъ условіемъ, чтобь тотчасъ по смерти кого нибудь изъ нихъ оставшемуся въ живыхъ былъ выданъ капиталъ A. Найти нормальную величину отношенія

$$\frac{x}{A}.$$

На основаніи рѣшенія предыдущей задачи получаемъ

$$\frac{x}{A} = \frac{1 - tX_{c,\partial}}{1 + X_{c,\partial}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t}},$$

если первая уплата капитала x происходитъ въ тотъ моментъ, когда вышеупомянутыя лица имѣютъ возрасты c лѣтъ и $д$ лѣтъ.

Задача 9^{ая}. Лицо возраста с вноситъ въ страховое учрежденіе капиталъ Z съ тѣмъ, чтобы другому лицу возраста д была обезпечена ежегодная пожизненная пенсія A съ момента смерти перваго лица. Опредѣлить нормальную величину отношенія $\frac{Z}{A}$.

Для упрощенія расчета пріурочимъ всѣ выдачи пенсіи къ тѣмъ моментамъ, когда второе лицо достигаетъ возраста

$$д+1 \text{ лѣтъ}, \quad д+2 \text{ лѣтъ}, \quad д+3 \text{ лѣтъ и т. д.}$$

Далѣе условія задачи истолкуемъ такимъ образомъ, что при достиженіи возрастовъ

$$д+1 \text{ лѣтъ}, \quad д+2 \text{ лѣтъ}, \quad д+3 \text{ лѣтъ и т. д.}$$

второе лицо во всякомъ случаѣ получаетъ пенсію A, которую однако оно тотчасъ возвращаетъ страховому учрежденію, если и первое лицо оказывается живымъ.

При такомъ толкованіи вопроса легко получается формула

$$\frac{Z}{A} = X'_д - X_{c,\,д}.$$

Желающимъ ознакомиться подробнѣе съ различными вопросами страхованія жизни и пріемами ихъ рѣшенія укажемъ капитальное сочиненіе Б. Ф. Малешевскаго «Теорія и практика пенсіонныхъ кассъ»; оно содержитъ также изложеніе пріемовъ составленія таблицъ смертности.

Литература.

E. Dormoy. Théorie mathématique des assurances sur la vie 1878.

U. Broggi. Traité des assurances sur la vie avec developpements sur le calcul des probabilités. Traduit de l'italien par S. Lattés. 1907.

G. Bohlmann. Lebensversicherungs - Mathematik (Math. Enzyklopädie I D 4 b).

С. Е. Савичъ. Элементарная теорія страхованія жизни и трудоспособности.

ПРИЛОЖЕНІЕ

МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ ОЖИДАНІЙ

—МЕТОДА МОМЕНТОВЪ—

КЪ ВЫВОДУ ВТОРОЙ ПРЕДѢЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ

ИСЧИСЛЕНІЯ ВѢРОЯТНОСТЕЙ.

Неравенства Чебышева
и
основная теорема.

§ 1. Для приложенія метода Бьенэме-Чебышева (метода моментовъ) къ доказательству второй предѣльной теоремы исчисленія вѣроятностей мы должны разсматривать непрерывныя дроби вида

$$\cfrac{a_1}{z+b_1-\cfrac{a_2}{z+b_2-\cfrac{a_3}{z+b_3-\cdots}}}$$

въ связи съ рядами вида

$$S_0\frac{1}{z}+S_1\frac{1}{z^2}+S_2\frac{1}{z^3}+S_3\frac{1}{z^4}+\ldots,$$

гдѣ число z перемѣнное, а остальныя буквы означаютъ числа постоянныя или перемѣнныя, не зависящія отъ z. Какъ рядъ такъ и непрерывная дробь будутъ у насъ безконечными; но мы не имѣемъ надобности предполагать ихъ сходящимися, ибо рядъ служитъ намъ только для образованія конечныхъ суммъ

$$S_0\frac{1}{z}+S_1\frac{1}{z^2}+S_2\frac{1}{z^3}+\ldots+S_{k-1}\frac{1}{z^k}$$

съ произвольнымъ числомъ слагаемыхъ, а непрерывная дробь

нужна только ради ея подходящихъ дробей

$$\frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)} = \cfrac{a_1}{z+b_1-\cfrac{a_2}{z+b_2-\cdots-\cfrac{a_m}{z+b_m}}},$$

при чемъ цѣлыя функціи

$$\psi_1(z),\ \psi_2(z),\ \psi_3(z),\ldots$$

и

$$\omega_1(z),\ \omega_2(z),\ \omega_3(z),\ldots$$

послѣдовательно опредѣляются формулами

$$\psi_1(z) = a_1, \qquad \psi_2(z) = a_1(z+b_2),$$

$$\omega_1(z) = z+b_1, \quad \omega_2(z) = (z+b_1)(z+b_2) - a_2,$$

$$\psi_m(z) = (z+b_m)\psi_{m-1}(z) - a_m\psi_{m-2}(z),$$

$$\omega_m(z) = (z+b_m)\omega_{m-1}(z) - a_m\omega_{m-2}(z).$$

Числа

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ldots$$

мы должны ограничить условіемъ, что среди опредѣлителей

$$S_0, \quad \begin{vmatrix} S_0, & S_1 \\ S_1, & S_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} S_0, & S_1, & S_2 \\ S_1, & S_2, & S_3 \\ S_2, & S_3, & S_4 \end{vmatrix}, \ldots$$

нѣтъ равныхъ нулю. Такое условіе необходимо и достаточно, чтобы можно было связать рядъ съ непрерывною дробью общимъ равенствомъ

$$\omega_m(z)\cdot\left\{S_0\frac{1}{z} + S_1\frac{1}{z^2} + S_2\frac{1}{z^3} + \ldots\right\} - \psi_m(z) = \frac{\alpha}{z^{m+1}} + \frac{\beta}{z^{m+2}} + \ldots,$$

которое имѣетъ слѣдующій смыслъ: если множить цѣлую функцію $\omega_m(z)$ по обычнымъ правиламъ на безконечную сумму

$$S_0\frac{1}{z} + S_1\frac{1}{z^2} + S_2\frac{1}{z^3} + \ldots,$$

то въ получаемомъ такимъ образомъ произведенiи должны приводиться къ нулю коэффицiенты при

$$\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \frac{1}{z^3}, \ldots \frac{1}{z^m},$$

цѣлая же часть этого произведенiя образуетъ функцiю $\psi_m(z)$. Полагая

$$\omega_m(z) = L_0 + L_1 z + L_2 z^2 + \ldots + L_{m-1} z^{m-1} + z^m,$$

мы получаемъ отсюда систему уравненiй

$$\begin{array}{l} S_0 L_0 + S_1 L_1 + \ldots + S_{m-1} L_{m-1} + S_m = 0, \\ S_1 L_0 + S_2 L_1 + \ldots + S_m L_{m-1} + S_{m+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{m-1} L_0 + S_m L_1 + \ldots + S_{2m-2} L_{m-1} + S_{2m-1} = 0, \end{array}$$

которая дѣйствительно опредѣляетъ коэффицiенты

$$L_0, L_1, \ldots, L_{m-1}$$

цѣлой функцiи $\omega_m(z)$, если только, согласно вышеупомянутому условiю, опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} S_0, & S_1, \ldots, & S_{m-1} \\ S_1, & S_2, \ldots, & S_m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{m-1}, & S_m, \ldots, & S_{2m-2} \end{vmatrix}$$

не равенъ нулю.

Обозначая затѣмъ для любой цѣлой функцiи

$$\varphi(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots + C_k z^k$$

символомъ

$$[\varphi(x)]$$

сумму

$$S_0 C_0 + S_1 C_1 + S_2 C_2 + \ldots + S_k C_k$$

мы можемъ представить вышеприведенную систему уравненiй

такъ:

$$[\omega_m(x)] = 0, \ [x\omega_m(x)] = 0, \ldots, \ [x^{m-1}\omega_m(x)] = 0,$$

и можемъ замѣнить ее даже однимъ равенствомъ

$$[\theta(x)\,\omega_m(x)] = 0,$$

если подъ $\theta(z)$ будемъ подразумѣвать всѣ цѣлыя функціи $m-1^{ой}$ степени.

Введенный нами символъ $[\varphi(x)]$ удовлетворяетъ, очевидно, простой теоремѣ сложенія

$$[\varphi(x) + \chi(x)] = [\varphi(x)] + [\chi(x)].$$

На этомъ основаніи не трудно провѣрить, что функціи

$$\omega_m(z), \ \omega_{m-1}(z), \ \omega_{m-2}(z)$$

связаны между собой уравненіемъ вида

$$\omega_m(z) = (z + b_m)\,\omega_{m-1}(z) - a_m\,\omega_{m-2}(z).$$

Въ самомъ дѣлѣ, каковы бы ни были постоянное число b_m и цѣлая функція $\theta(z)$, $m-3^{ей}$ степени, имѣемъ

$$[\theta(x)\,\omega_m(x)] = 0 \quad \text{и} \quad [(x + b_m)\,\omega_{m-1}(x)\,\theta(x)] = 0,$$

и потому разность

$$\omega_m(z) - (z + b_m)\,\omega_{m-1}(z),$$

согласно вышеприведенной теоремѣ сложенія, должна удовлетворять уравненію

$$[\theta(x)\,\{\omega_m(x) - (x + b_m)\,\omega_{m-1}(x)\}] = 0,$$

гдѣ $\theta(z)$ также произвольная цѣлая функція $m-3^{ей}$ степени; а при нѣкоторомъ опредѣленномъ значеніи коэффиціента b_m эта разность приводится къ цѣлой функціи $m-2^{ой}$ степени и тогда она можетъ отличаться только постояннымъ множителемъ отъ функціи $\omega_{m-2}(z)$, которая какъ разъ опредѣляется уравненіемъ

$$[\theta(x)\,\omega_{m-2}(x)] = 0,$$

гдѣ степень произвольной цѣлой функціи $\theta(z)$ равна $m-3$.

Что касается цѣлой функціи $\psi_m(z)$, то при помощи введеннаго нами символа она можетъ быть опредѣлена формулой

$$\psi_m(z) = \left[\frac{\omega_m(x) - \omega_m(z)}{x - z}\right].$$

Послѣдняя формула представляетъ сокращенное выраженіе слѣдующей

$$\psi_m(z) = S_0 z^{m-1} + (S_0 L_{m-1} + S_1) z^{m-2}$$
$$+ (S_0 L_{m-2} + S_1 L_{m-1} + S_2) z^{m-3} + \ldots.$$

Слѣдуетъ замѣтить также, что неравенство опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} S_0, & S_1, \ldots, & S_{m-1} \\ S_1, & S_2, \ldots, & S_m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{m-1}, & S_m, \ldots, & S_{2m-2} \end{vmatrix}$$

нулю указываетъ на невозможность удовлетворить системѣ уравненій

$$[\varphi(x)] = 0, \ [x\varphi(x)] = 0, \ldots, \ [x^{m-1}\varphi(x)] = 0$$

никакою цѣлою функціею $\varphi(z)$, которая не равна тожественно нулю и имѣетъ степень меньшую m. И наоборотъ, если только что приведенной системѣ уравненій нельзя удовлетворить цѣлою функціею $\varphi(z)$ степени ниже m, не приравнивая всѣхъ ея коэффиціентовъ нулю, то нашъ опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} S_0, & S_1, \ldots, & S_{m-1} \\ S_1, & S_2, \ldots, & S_m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{m-1}, & S_m, \ldots, & S_{2m-2} \end{vmatrix}$$

не равенъ нулю.

На этомъ основаніи мы можемъ для тѣхъ рядовъ

$$S_0 \frac{1}{z} + S_1 \frac{1}{z^2} + S_2 \frac{1}{z^3} + \ldots,$$

которыми спеціально будемъ заниматься, заключать о существованіи соотвѣтствующей непрерывной дроби

$$\cfrac{a_1}{z+b_1-\cfrac{a_2}{z+b_2-\cfrac{a_3}{z+b_3-\cdot_{\cdot_{\cdot}}}}}$$

безъ вычисленія опредѣлителей

$$S_0, \quad \begin{vmatrix} S_0, & S_1 \\ S_1, & S_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} S_0, & S_1, & S_2 \\ S_1, & S_2, & S_3 \\ S_2, & S_3, & S_4 \end{vmatrix}, \ldots.$$

Не дѣлая пока никакихъ особыхъ предположеній, обратимъ вниманіе на то, что коэффиціенты цѣлыхъ функцій

$$\omega_m(z) \quad \text{и} \quad \psi_m(z)$$

представляютъ нѣкоторыя раціональныя функціи чиселъ

$$S_0, S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{2m-1}.$$

Слѣдовательно корни уравненія

$$\omega_m(z) = 0$$

алгебраическія функціи тѣхъ же чиселъ и потому, при непрерывномъ измѣненіи послѣднихъ, они также должны измѣняться непрерывно.

Если же для нѣкоторой совокупности чиселъ

$$S_0, S_1, \ldots, S_{2m-2}, S_{2m-1}$$

всѣ эти корни различны, то мы можемъ установить равенство

$$\frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)} = \sum_{\xi} \frac{\rho}{z-\xi},$$

гдѣ суммированіе, обозначенное символомъ $\sum\limits_{\xi}$, распространяется

на всѣ корни уравненія

$$\omega_m(\xi) = 0,$$

а значенія ρ опредѣляются формулой

$$\rho = \frac{\psi_m(\xi)}{\omega'_m(\xi)};$$

и обѣ формулы

$$\frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)} = \sum_\xi \frac{\rho}{z-\xi} \quad \text{и} \quad \rho = \frac{\psi_m(\xi)}{\omega'_m(\xi)}$$

сохранятъ свою силу при достаточныхъ малыхъ измѣненіяхъ чиселъ

$$S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{2m-2}, S_{2m-1},$$

непрерывными функціями которыхъ будутъ всѣ ρ подобно ξ.

Положимъ теперь, что мы имѣемъ нѣкоторую совокупность вещественныхъ чиселъ, общій членъ которой обозначимъ буквою x; положимъ также, что каждому изъ этихъ x соотвѣтствуетъ свое опредѣленное положительное число p.

Наконецъ положимъ, что имѣютъ смыслъ суммы

$$\sum_x p, \sum_x px, \sum_x px^2, \sum_x px^3, \ldots$$

распространенныя на всю нашу совокупность чиселъ x, и этимъ суммамъ приравняемъ, соотвѣтственнымъ образомъ коэффиціенты вышеприведеннаго ряда

$$S_0 \frac{1}{z} + S_1 \frac{1}{z^2} + S_2 \frac{1}{z^3} + \ldots,$$

такъ что, вообще, будетъ

$$S_k = \sum_x px^k.$$

При такихъ предположеніяхъ, на которыхъ мы спеціально остановимся, введенный нами символъ

$$[\varphi(x)]$$

обращается въ сумму

$$\sum_x p\varphi(x).$$

А система уравненій, которой подчинены коэффиціенты функціи $\omega_m(z)$, можетъ быть выражена равенствомъ

$$\sum_x p\theta(x)\,\omega_m(x) = 0,$$

гдѣ $\theta(z)$, по прежнему, произвольная цѣлая функція $m-1^{\text{ой}}$ степени.

Вмѣстѣ съ тѣмъ нетрудно видѣть, что сумма

$$\sum_x p\varphi(x)\,\varphi(x)$$

можетъ быть нулемъ только для такихъ вещественныхъ цѣлыхъ функцій $\varphi(z)$, которыя сами обращаются въ нуль, коль скоро z равняется любому изъ чиселъ x нашей совокупности. А отсюда слѣдуетъ, что требованію, выражаемому равенствомъ

$$\sum_x p\theta(x)\,\varphi(x) = 0,$$

гдѣ $\theta(z)$ произвольная цѣлая функція $m-1^{\text{ой}}$ степени, не можетъ удовлетворить никакая цѣлая функція $\varphi(z)$, $m-1^{\text{ой}}$ степени, если совокупность x содержитъ болѣе $m-1$ чиселъ.

Поэтому, если наша совокупность x содержитъ болѣе $m-1$ чиселъ, то существованіе вышеуказанныхъ дробей

$$\frac{\psi_1(z)}{\omega_1(z)},\ \frac{\psi_2(z)}{\omega_2(z)},\ \ldots,\ \frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)},$$

опредѣляемыхъ первыми $2m$ членами ряда

$$S_0\frac{1}{z} + S_1\frac{1}{z^2} + S_2\frac{1}{z^3} + \ldots$$

не подлежитъ сомнѣнію. При томъ же предположеніи нетрудно убѣдиться, что число вещественныхъ, различныхъ, корней уравненія

$$\omega_m(z) = 0$$

должно быть равнымъ m, а не меньше m.

Въ самомъ дѣлѣ, если различными вещественными корнями, нечетной кратности, для уравненія

$$\omega_m(z) = 0$$

будутъ k и только k чиселъ

$$c_1,\ c_2, \ldots,\ c_k,$$

то произведеніе

$$(z - c_1)(z - c_2) \ldots (z - c_k)\,\omega_m(z),$$

при всѣхъ вещественныхъ значеніяхъ z, будетъ числомъ положительнымъ и будетъ нулемъ только вмѣстѣ съ $\omega_m(z)$, и потому, если $k < m$, то сумма

$$\sum_x p(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_k)\,\omega_m(x),$$

содержащая не менѣе m слагаемыхъ и среди нихъ не болѣе

$$k + \frac{m-k}{2} = m - \frac{m-k}{2}$$

нулей, не можетъ быть нулемъ, между тѣмъ какъ она при $k < m$ должна быть нулемъ, въ силу общаго равенства

$$\sum p\theta(x)\,\omega_m(x) = 0,$$

опредѣляющаго функцію $\omega_m(z)$.

Итакъ $k = m$, и соотвѣтственно этому $\omega_m(z)$ должна разлагаться на m различныхъ, вещественныхъ, множителей первой степени

$$\omega_m(z) = (z - \xi_1)(z - \xi_2) \ldots (z - \xi_m).$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующимъ выводамъ, на которыхъ будутъ основаны дальнѣйшія наши заключенія.

Если совокупность вещественныхъ чиселъ x содержитъ не менѣе μ членовъ и если соотвѣтствующія имъ числа p положительны, то для

$$m = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ \mu$$

существуетъ цѣлая функція $\omega_m(z)$, $m^{\text{ой}}$ степени, опредѣляемая

системой уравненія

$$(1)\quad \sum_x p\omega_m(x)=0,\ \sum_x px\omega_m(x)=0,\ldots,\ \sum_x px^{m-1}\omega_m(x)=0$$

и условіемъ, что у ней коэффиціентъ при z^m равенъ единицѣ. Эта функція разлагается на m различныхъ, вещественныхъ, множителей первой степени

$$(2)\qquad \omega_m(z)=(z-\xi_1)(z-\xi_2)\ldots(z-\xi_m).$$

Полагая затѣмъ

$$(3)\qquad \psi_m(z)=\sum_x p\,\frac{\omega_m(z)-\omega_m(x)}{z-x},$$

можемъ, при тѣхъ же условіяхъ на счетъ x и p, установить формулы

$$(4)\qquad \frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)}=\sum_\xi \frac{\rho}{z-\xi},\qquad \rho=\frac{\psi_m(\xi)}{\omega'_m(\xi)},$$

гдѣ

$$\xi=\xi_1,\ \xi_2,\ldots,\ \xi_m,$$

и общее равенство

$$(5)\qquad \sum_\xi \rho\,\Omega(\xi)=\sum_x p\,\Omega(x)$$

для любой цѣлой функціи $\Omega(z)$, степень которой не выше $2m-1$.

Въ самомъ дѣлѣ, если степень цѣлой функціи $\Omega(z)$ не превосходитъ $2m-1$, то мы можемъ установить равенства

$$\Omega(z)=\Omega_0(z)+\theta(z)\,\omega_m(z)$$

и

$$\Omega_0(z)=\sum_\xi \frac{\omega_m(z)}{(z-\xi)\,\omega'_m(\xi)}\,\Omega(\xi),$$

гдѣ степень цѣлой функціи $\theta(z)$ не превосходитъ $m-1$.

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$\sum_x p\,\theta(x)\,\omega_m(x)=0=\sum_\xi \rho\,\theta(\xi)\,\omega_m(\xi)$$

и

$$\sum_x p\,\Omega_0(x) = \sum_\xi \Omega(\xi) \sum_x p\,\frac{\omega_m(x) - \omega_m(\xi)}{(x-\xi)\,\omega'_m(\xi)}$$

$$= \sum_\xi \frac{\psi_m(\xi)}{\omega'_m(\xi)}\,\Omega(\xi) = \sum_\xi \rho\,\Omega(\xi);$$

слѣдовательно

$$\sum_x p\,\Omega(x) = \sum_x p\,\Omega_0(x) = \sum_\xi \rho\,\Omega(\xi),$$

что и выражается равенствомъ (5).

Наконецъ, разсматривая два ряда цѣлыхъ функцій

$$\omega_0(z) = 1,\ \omega_1(z),\ \omega_2(z), \ldots,\ \omega_\mu(z)$$

и

$$\psi_0(z) = 0,\ \psi_1(z),\ \psi_2(z), \ldots,\ \psi_\mu(z),$$

мы убѣждаемся, что каждыя три смежныхъ функціи этихъ рядовъ связаны между собой линейными формулами

$$(6)\quad \begin{aligned} \omega_m(z) &= (z + b_m)\,\omega_{m-1}(z) - a_m\,\omega_{m-2}(z), \\ \psi_m(z) &= (z + b_m)\,\psi_{m-1}(z) - a_m\,\psi_{m-2}(z), \end{aligned}$$

коэффиціенты которыхъ a_m и b_m можно опредѣлить равенствами

$$(7)\qquad b_m = -\frac{\sum_x px\,\omega_{m-1}(x)\,\omega_{m-1}(x)}{\sum_x p\omega_{m-1}(x)\,\omega_{m-1}(x)}$$

и

$$(8)\qquad a_m = \frac{\sum_x p\omega_{m-1}(x)\,\omega_{m-1}(x)}{\sum_x p\omega_{m-2}(x)\,\omega_{m-2}(x)},$$

при $m \geqq 2$.

Для полнаго опредѣленія функцій

$$\omega_1(z),\ \psi_1(z),\ \omega_2(z),\ \psi_2(z), \ldots,\ \omega_\mu(z),\ \psi_\mu(z)$$

слѣдуетъ присоединить еще четыре равенства

$$\omega_1(z) = z + b_1, \quad \psi_1(z) = a_1$$

и

$$a_1 = \sum_x p, \quad b_1 = -\frac{\sum_x px}{\sum_x p}.$$

Изъ формулъ (6) и (8) вытекаетъ важное для насъ простое равенство

(9) $$\psi_m(z)\,\omega_{m-1}(z) - \psi_{m-1}(z)\,\omega_m(z) = \sum_x p\,\omega_{m-1}(x)\,\omega_{m-1}(x),$$

въ силу котораго можно замѣнить вторую изъ формулъ (4) такою

(10) $$\rho = \frac{\sum_x p\omega_{m-1}(x)\,\omega_{m-1}(x)}{\omega'_m(\xi)\,\omega_{m-1}(\xi)}.$$

Если совокупность чиселъ x со своими положительными числами p измѣняется, но суммы

(11) $$S_0 = \sum_x p, \quad S_1 = \sum_x px, \ldots, \quad S_{2m-1} = \sum_x px^{2m-1}$$

сохраняютъ неизмѣнныя величины, то функціи

$$\omega_m(z) \quad \text{и} \quad \psi_m(z)$$

остаются также неизмѣнными и вмѣстѣ съ тѣмъ, конечно, сохраняютъ свои значенія связанныя съ ними числа ξ и ρ.

Если же, съ измѣненіемъ чиселъ x и p, измѣняются и суммы (11), то мы можемъ, все-таки, утверждать, что при достаточно маломъ измѣненіи этихъ суммъ функціи

$$\omega_m(z) \quad \text{и} \quad \psi_m(z)$$

опредѣляемыя уравненіемъ (1) и формулой (3) не перестанутъ существовать и всѣ корни уравненія

$$\omega_m(z) = 0$$

останутся вещественными и различными, равно какъ останутся вещественными и числа ρ, опредѣляемыя формулой (4), или равносильною ей формулою (10).

Согласно вышесказанному эти числа ξ и ρ должны быть непрерывными функціями суммъ

$$\sum_x p, \sum_x px, \ldots, \sum_x px^{2m-1}.$$

Сохраняя предположеніе, что числа

$$S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{2m-1}$$

задаются формулой

$$S_k = \sum_x px^k$$

и разсматривая только такія совокупности вещественныхъ чиселъ x и положительныхъ чиселъ p, для которыхъ существуютъ наши функціи

$$\omega_m(z) \quad \text{и} \quad \psi_m(z)$$

и уравненіе

$$\omega_m(z) = 0$$

не имѣетъ ни мнимыхъ ни кратныхъ корней, мы установимъ замѣчательныя неравенства, на которыя впервые было обращено вниманіе Чебышевымъ въ краткой замѣткѣ «Sur les valeurs limites des intégrales», помѣщенной въ журналѣ Ліувилля за 1874.

Эти неравенства мы представимъ въ немного измѣненномъ видѣ; что же касается ихъ доказательства, то оно, впервые, было дано въ статьѣ*) моей «Доказательства нѣкоторыхъ неравенствъ П. Л. Чебышева», откуда мы его и возьмемъ.

Неравенства Чебышева.

Пусть α будетъ какое нибудь вещественное число, а ξ' и ξ'' два ближайшихъ къ нему корня уравненія

$$\omega_m(z) = 0,$$

*) Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества за 1883 годъ.

такъ что

$$\xi' \leqq \alpha \leqq \xi''.$$

Если

$$\sum^{x<\alpha} p, \quad \sum^{x\leqq\alpha} p, \quad \sum^{\xi<\xi'} \rho, \quad \sum^{\xi\leqq\xi''} \rho$$

означаютъ соотвѣтственно суммы всѣхъ значеній p

$$\text{для } x < \alpha \quad \text{и} \quad \text{для } x \leqq \alpha$$

и суммы всѣхъ значеній ρ

$$\text{для } \xi < \xi' \quad \text{и} \quad \text{для } \xi \leqq \xi'';$$

то должно быть

$$(12) \qquad \sum^{x<\alpha} p \geqq \sum^{\xi<\xi'} \rho \quad \text{и} \quad \sum^{x\leqq\alpha} p \leqq \sum^{\xi\leqq\xi''} \rho.$$

Примѣчаніе. Если α не превосходитъ наименьшаго изъ корней уравненія

$$\omega_m(z) = 0,$$

то первое изъ неравенствъ (12) надо замѣнить очевиднымъ

$$\sum^{x<\alpha} p \geqq 0.$$

Подобнымъ же образомъ, если α не меньше наибольшаго изъ корней уравненія

$$\omega_m(z) = 0,$$

то второе изъ неравенствъ (12) слѣдуетъ замѣнить также очевиднымъ

$$\sum^{x\leqq\alpha} p \leqq \sum_{\xi} \rho = \sum_{x} p.$$

Доказательство. Останавливаясь на доказательствѣ перваго неравенства, образуемъ цѣлую функцію

$$\Omega(z),$$

$2m - 2^{\text{ой}}$ степени, согласно условіямъ:

$$1)\quad \Omega(\xi) = 1 \quad \text{при} \quad \xi < \xi',$$
$$2)\quad \Omega(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad \xi \geqq \xi',$$
$$3)\quad \Omega'(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad \xi \text{ не } = \xi',$$

гдѣ ξ означаетъ, подобно прежнему, всѣ корни уравненія

$$\omega_m(z) = 0.$$

Для этой цѣли полагаемъ

$$\Omega(z) = \Omega_0(z) + \omega_m(z)\,\Omega_1(z),$$

а цѣлыя функціи

$$\Omega_0(z),\ m - 1^{\text{ой}} \text{ степени, и } \Omega_1(z),\ m - 2^{\text{ой}} \text{ степени,}$$

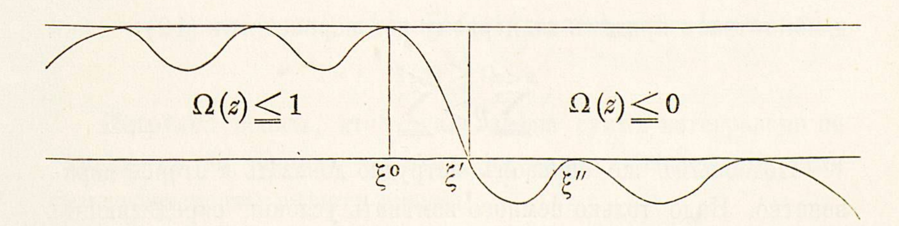
составляемъ, по извѣстной формулѣ Лагранжа, согласно опредѣляющимъ ихъ условіямъ

$$\Omega_0(\xi) = 1 \quad \text{при} \quad \xi < \xi',$$
$$\Omega_0(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad \xi \geqq \xi',$$
$$\omega'_m(\xi)\,\Omega_1(\xi) = -\Omega'_0(\xi) \quad \text{при} \quad \xi \text{ не } = \xi'.$$

Установивъ существованіе нужной для насъ функціи $\Omega(z)$, замѣчаемъ, что ея производная $\Omega'(z)$ обращается въ нуль $m - 1$ разъ, при всѣхъ корняхъ уравненія

$$\omega_m(z) = 0,$$

за исключеніемъ ξ', и еще $m - 2$ раза во всѣхъ промежуткахъ между смежными корнями этого уравненія, за исключеніемъ промежутка отъ ξ' до смежнаго корня, меньшаго ξ'. Этотъ смежный съ ξ' корень на нашемъ схематическомъ чертежѣ, показывающемъ ходъ функціи $\Omega(z)$, обозначенъ символомъ ξ^0.



А такъ какъ степень $\Omega'(z)$ равна $2m-3$, то указанными нами исчерпываются всѣ корни уравненія

$$\Omega'(z)=0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что въ промежуткѣ отъ $z=\xi^0$ до $z=\xi'$ постоянно должно быть

$$\Omega'(z)<0.$$

И затѣмъ, согласно приведенному схематическому чертежу, мы легко убѣждаемся въ вѣрности неравенства

$$\Omega(z)\leqq 1 \quad \text{при} \quad z<\xi'$$

и неравенства

$$\Omega(z)\leqq 0 \quad \text{при} \quad z>\xi';$$

слѣдовательно

$$\sum_x p\,\Omega(x)\leqq\sum^{x<\xi'} p\leqq\sum^{x<\alpha} p.$$

Съ другой стороны имѣемъ

$$\sum_x p\,\Omega(x)=\sum_\xi \rho\,\Omega(\xi)$$

и

$$\sum_\xi \rho\,\Omega(\xi)=\sum^{\xi<\xi'}\rho,$$

въ силу условій, опредѣляющихъ функцію $\Omega(z)$, и общаго равенства (5).

Остается сопоставить послѣднія равенства съ только что установленнымъ неравенствомъ

$$\sum_x p\,\Omega(x)\leqq\sum^{x<\alpha} p,$$

и мы тотчасъ придемъ къ первому изъ неравенствъ (12)

$$\sum^{x<\alpha} p\geqq\sum^{\xi<\xi'}\rho.$$

Подобнымъ же образомъ нетрудно доказать и второе неравенство. Надо только немного измѣнить условія, опредѣляющія

вспомогательную функцію $\Omega(z)$; а именно, теперь слѣдуетъ положить

$$1)\quad \Omega(\xi)=1 \quad \text{при} \quad \xi \leqq \xi''$$

$$2)\quad \Omega(\xi)=0 \quad \text{при} \quad \xi > \xi''$$

$$3)\quad \Omega'(\xi)=0 \quad \text{при} \quad \xi \text{ не } = \xi''.$$

Для опредѣленной такими равенствами цѣлой функціи $\Omega(z)$, $2m-2^{\text{ой}}$ степени, имѣемъ

$$\sum_x p\,\Omega(x) \geqq \sum^{x\leqq\xi''} p \geqq \sum^{x\leqq\alpha} p$$

и вмѣстѣ съ тѣмъ

$$\sum_x p\,\Omega(x) = \sum_\xi \rho\,\Omega(\xi) = \sum^{\xi\leqq\xi''} \rho;$$

откуда тотчасъ вытекаетъ второе неравенство

$$\sum^{x\leqq\alpha} p \leqq \sum^{\xi\leqq\xi''} \rho.$$

Займемся теперь примѣненіемъ нашихъ общихъ выводовъ къ замѣчательному ряду и соотвѣтствующей ему непрерывной дроби; мы придемъ такимъ образомъ къ предложенію, которое служитъ основаніемъ для доказательства теоремы о предѣлѣ вѣроятности, по способу Чебышева. Предварительно однако сдѣлаемъ еще общее замѣчаніе о возможности замѣнить суммы

$$\sum_x p, \quad \sum_x px, \quad \sum_x px^2, \ldots$$

интегралами

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_a^b x f(x)\,dx, \quad \int_a^b x^2 f(x)\,dx, \ldots,$$

гдѣ a и b означаютъ любыя вещественныя числа, или $-\infty$ и $+\infty$, а вещественная функція $f(x)$ удовлетворяетъ неравенству

$$f(x) \geqq 0.$$

Нетрудно понять, что такая замѣна суммъ интегралами не нарушаетъ ни нашихъ формулъ, ни нашихъ заключеній, если только интегралы имѣютъ смыслъ.

Установивъ это, мы возьмемъ рядъ

$$S_0\frac{1}{z}+S_1\frac{1}{z^2}+S_2\frac{1}{z^3}+\ldots,$$

коэффиціенты котораго опредѣляются одною формулою

$$(13)\qquad S_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}x^k\,dx,$$

или, что все равно, совокупностью двухъ формулъ

$$S_{2k}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-x^2}x^{2k}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2},$$

и

$$S_{2k+1}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}x^{2k+1}\,dx=0,$$

гдѣ k означаетъ цѣлое положительное число или нуль.

Для такого ряда функція $\omega_m(z)$ опредѣляется формулою

$$(14)\qquad \omega_m(z)=\frac{e^{z^2}}{(-2)^m}\cdot\frac{d^m\,e^{-z^2}}{dz^m},$$

ибо изъ формулы (14) слѣдуетъ:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,\theta(x)\,\omega_m(x)\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^m}{2^m\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(x)\frac{d^m\,e^{-x^2}}{dx^m}\,dx=\frac{1}{2^m\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\frac{d^m\,\theta(x)}{dx^m}\,dx,$$

какова бы ни была цѣлая функція $\theta(z)$, и потому

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,\theta(x)\,\omega_m(x)\,dx=0,$$

коль скоро степень цѣлой функціи $\theta(z)$ меньше m.

Отсюда вытекаетъ также важное для насъ равенство

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,\omega_m(x)\,\omega_m(x)\,dx=\frac{1.2.3\ldots m}{2^m},$$

въ силу которой формула (10) приводится въ данномъ случаѣ къ такой

$$\rho = \frac{1.2.3\ldots.(m-1)}{2^{m-1}\,\omega'_m(\xi)\,\omega_{m-1}(\xi)}.$$

Съ другой стороны изъ формулы (14) нетрудно вывесть рядъ простыхъ соотношеній

$$\omega'_m(z) = \frac{2ze^{z^2}}{(-2)^m}\cdot\frac{d^m e^{-z^2}}{dz^m} + \frac{e^{z^2}}{(-2)^m}\cdot\frac{d^m(-2ze^{-z^2})}{dz^m}$$

$$= \frac{me^{z^2}}{(-2)^{m-1}}\cdot\frac{d^{m-1}e^{-z^2}}{dz^{m-1}} = m\omega_{m-1}(z),$$

$$\omega_m(z) = \frac{e^{z^2}}{(-2)^m}\cdot\frac{d^{m-1}(-2ze^{-z^2})}{dz^{m-1}}$$

$$= \frac{ze^{z^2}}{(-2)^{m-1}}\cdot\frac{d^{m-1}e^{-z^2}}{dz^{m-1}} - \frac{(m-1)e^{z^2}}{2(-2)^{m-2}}\cdot\frac{d^{m-2}e^{-z^2}}{dz^{m-2}}.$$

$$= z\omega_{m-1}(z) - \frac{m-1}{2}\omega_{m-2}(z)$$

$$= \frac{z}{m}\omega'_m(z) - \frac{1}{2m}\omega''_m(z).$$

Равенствомъ

$$\omega'(z) = m\omega_{m-1}(z)$$

мы воспользуемся, прежде всего, для преобразованія вышеприведеннаго выраженія ρ къ слѣдующему виду

$$\rho = \frac{1.2.3\ldots.\,m}{2^{m-1}\,\omega'_m(\xi)\,\omega'_m(\xi)}. \tag{15}$$

Послѣднее выраженіе ρ послужитъ намъ для вывода замѣчательнаго, простого, неравенства, изъ котораго вытекаетъ важное для насъ предложеніе:

$$\text{пред.}_{m=\infty}\ \rho = 0.$$

Это неравенство и его выводъ мы заимствуемъ изъ статьи*) академика Н. Я. Сонина «О точности опредѣленія предѣльныхъ

---

*) Записки Академіи Наукъ. Томъ 69, кн. I, 1892.

величинъ интеграловъ», не передавая однако буквально ея содержанія.

Начнемъ съ того, что замѣнимъ квадратъ

$$\omega'_m(\xi)\,\omega'_m(\xi),$$

входящій въ знаменатель разсматриваемаго выраженія ρ равною ему суммою

$$\omega'_m(\xi)\,\omega'_m(\xi) + B\omega_m(\xi)\,\omega_m(\xi),$$

подбирая вспомогательный коэффиціентъ B такъ, чтобы производная, по z, цѣлой функціи

$$\omega'_m(z)\,\omega'(z) + B\omega_m(z)\,\omega_m(z)$$

дѣлилась на квадратъ

$$\omega'_m(z)\,\omega'_m(z).$$

На первую степень $\omega'_m(z)$ производная, составленной нами цѣлой функціи, равная

$$2\omega'_m(z)\left\{\omega''_m(z) + B\omega_m(z)\right\},$$

дѣлится при всякомъ B; на квадратъ же

$$\omega'_m(z)\,\omega'_m(z)$$

она будетъ дѣлится при

$$B = 2m,$$

ибо согласно вышеприведенному соотношенію между

$$\omega_m(z),\quad \omega'_m(z) \quad \text{и} \quad \omega''_m(z)$$

имѣемъ

$$\omega''_m(z) + 2m\omega(z) = 2z\omega'(z).$$

Мы приходимъ такимъ образомъ къ равенству

$$\left\{\omega'_m(z)\,\omega'_m(z) + 2m\omega_m(z)\,\omega_m(z)\right\}' = 4z\omega'_m(z)\,\omega'_m(z)$$

которое показываетъ, что сумма

$$\omega'_m(z)\,\omega'_m(z) + 2m\omega_m(z)\,\omega_m(z)$$

достигаетъ своего наименьшаго значенія при $z = 0$.

Отсюда тотчасъ выводимъ неравенство

$$\rho < \frac{1.2.3.\dots m}{2^{m-1}\{\omega'_m(0)\,\omega'_m(0) + 2m\,\omega_m(0)\,\omega_m(0)\}},$$

разборомъ и упрощеніемъ котораго мы займемся.

Для этого обращаемся къ равенствамъ

$$\omega_1(z) = z, \quad \omega_2(z) = z^2 - \frac{1}{2}$$

$$\omega_m(z) = z\,\omega_{m-1}(z) - \frac{m-1}{2}\,\omega_{m-2}(z),$$

которыя могутъ служить для опредѣленія всѣхъ функцій $\omega_m(z)$, и принимаемъ во вниманіе формулу

$$\omega'_m(z) = m\,\omega_{m-1}(z).$$

Мы видимъ, что при m четномъ $\omega'_m(0)$ приводится къ нулю вмѣстѣ съ $\omega_{m-1}(0)$, значеніе же $\omega_m(0)$ опредѣляется изъ ряда послѣдовательныхъ равенствъ

$$\omega_2(0) = -\frac{1}{2},$$

$$\omega_4(0) = -\frac{3}{2}\,\omega_2(0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2},$$

$$\omega_6(0) = -\frac{5}{2}\,\omega_4(0) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2},$$

. . . .

и оказывается равнымъ

$$(-1)^{\frac{m}{2}}\,\frac{1.3.5.\dots(m-1)}{2^{\frac{m}{2}}}.$$

Напротивъ при m нечетномъ

$$\omega_m(0) = 0$$

и

$$\omega'_m(0) = m\,\omega_{m-1}(0) = (-1)^{\frac{m-1}{2}}\,\frac{1.3.5.\dots(m-2)\,m}{2^{\frac{m-1}{2}}}.$$

Слѣдовательно, при m четномъ имѣемъ

$$\rho < \frac{2.4.6\ldots(m-2)}{3.5.7\ldots(m-1)},$$

а при m нечетномъ

$$\rho < \frac{2.4.6\ldots(m-1)}{3.5.7\ldots m};$$

другими словами, при

$$m = 2l + 1 \quad \text{и} \quad m = 2l + 2,$$

гдѣ l любое цѣлое положительное число, имѣемъ

$$\rho < \frac{2.4.6\ldots 2l}{3.5.7\ldots(2l+1)}.$$

Чтобы придти къ еще болѣе простому неравенству, замѣчаемъ, что квадратъ выраженія

$$\frac{2.4.6\ldots 2l}{3.5.7\ldots(2l+1)}$$

можно представить въ видѣ произведенія дроби $\frac{1}{2l+1}$ на извѣстное выраженіе

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2l}{2l-1}\cdot\frac{2l}{2l+1},$$

которое, при возрастаніи l, постоянно возрастаетъ и, согласно формулѣ Валлиса, стремится къ предѣлу $\frac{\pi}{2}$, когда l возрастаетъ безпредѣльно. Это выраженіе, конечно, меньше своего предѣла. Изъ нашего замѣчанія вытекаетъ, такимъ образомъ, неравенство

$$\rho^2 < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2l+1},$$

или, что все равно,

(16) $$\rho < \sqrt{\frac{\pi}{4l+2}},$$

при

$$m = 2l + 1 \quad \text{и} \quad m = 2l + 2.$$

Немного усложняя выводъ, мы могли бы замѣнить $4l + 2$ числомъ $4l + 3$, которое указано Н. А. Сонинымъ; но для нашихъ заключеній такая замѣна не имѣетъ значенія.

Теперь уже нетрудно установить вышеупомянутое предложеніе, которое составляетъ главную цѣль этой статьи.

Теорема *). Если совокупность вещественныхъ чиселъ x, со своими положительными числами p, измѣняется такъ, что суммы

$$\sum_x p,\quad \sum_x px,\quad \sum_x px^2,\quad \sum_x px^3,\ldots.$$

приближаются соотвѣтственно къ предѣламъ

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,x\,dx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,x^2\,dx,\ldots.,$$

то для любого даннаго числа α обѣ суммы

$$\sum^{x<\alpha} p \quad \text{и} \quad \sum^{x\leqq\alpha} p$$

приближаются къ предѣлу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2}\,dx.$$

Доказательство. Положимъ для наглядности, что послѣдовательность измѣненій x и p опредѣляется цѣлымъ числомъ n, возрастающимъ безпредѣльно. При помощи этого вспомогательнаго числа мы можемъ выразить основное условіе теоремы такъ: для любого даннаго положительнаго числа i и для сколь угодно малаго неизмѣннаго положительнаго числа λ должно быть такое число ν, что неравенства

$$-\lambda < \sum_x px^k - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,x^k\,dx < \lambda$$

обязательно имѣютъ мѣсто

$$\text{при } k = 0, 1, 2, \ldots., i \text{ и } n > \nu.$$

---

*) A. Markoff. Sur les racines de l'équation $e^{x^2}\dfrac{d^m\,e^{-x^2}}{dx^m} = 0$ (Bull. de l'Acad. de St. Pétersbourg. 1898).

Намъ надо доказать, что при такомъ условіи численныя значенія обѣихъ разностей

$$\sum^{x<\alpha} p - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2}\,dx \quad \text{и} \quad \sum^{x\leqq\alpha} p - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2}\,dx$$

будутъ меньше любого даннаго положительнаго числа ε, при всѣхъ достаточно большихъ значеніяхъ n.

Для этой цѣли разбиваемъ число ε на два слагаемыхъ, также положительныхъ и опредѣленныхъ:

$$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon'', \; \varepsilon' > 0, \; \varepsilon'' > 0,$$

напримѣръ

$$\varepsilon' = \varepsilon'' = \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Затѣмъ беремъ цѣлое число l настолько большимъ, чтобы было

$$\sqrt{\frac{\pi}{4l+2}} < \frac{\varepsilon'}{2}$$

и полагаемъ

$$m = 2l+1 \quad \text{или} \quad 2l+2.$$

Дальнѣйшія наши разсужденія, въ которыхъ l и m будутъ предполагаться неизмѣнными, можно провести какъ при $m=2l+1$, такъ и при $m = 2l+2$. Этою двойственностью числа m мы воспользуемся, чтобы для упрощенія разсужденій устранить изъ разсмотрѣнія случаи, когда уравненіе

$$e^{z^2}\frac{d^m e^{-z^2}}{dz^m} = 0$$

допускаетъ корень

$$z = \alpha.$$

Возможность устраненія такихъ случаевъ вытекаетъ изъ того, что уравненіе

$$e^{z^2}\frac{d^m e^{-z^2}}{dz^m} = 0$$

не можетъ допускать одинаковыхъ корней при двухъ смежныхъ значеніяхъ m:

$$\text{при } m = 2l+1 \text{ и при } m = 2l+2.$$

Итакъ, приравнивая m одному изъ двухъ чиселъ

$$2l+1 \quad \text{и} \quad 2l+2,$$

мы будемъ предполагать, что ни одинъ изъ корней уравненія

$$e^{z^2}\frac{d^m e^{-z^2}}{dz^m}=0,$$

которые мы обозначимъ символомъ $\overline{\xi}$, не совпадаетъ съ α.

Сохраняя установленныя ранѣе обозначенія

$$\omega_m(z),\ \xi,\ \rho$$

для перемѣнной совокупности чиселъ x и p, мы для только что разсмотрѣннаго спеціальнаго случая, который сейчасъ будетъ играть роль предѣльнаго, замѣняемъ эти обозначенія такими

$$\overline{\omega_m}(z),\ \overline{\xi},\ \overline{\rho}.$$

Соотвѣтственно этому и неравенство (16) мы замѣнимъ слѣдующимъ

$$\overline{\rho}<\sqrt{\frac{\pi}{4l+2}},$$

откуда выводимъ

$$\overline{\rho}<\frac{\varepsilon'}{2},$$

для всѣхъ разсматриваемыхъ нами величинъ $\overline{\rho}$.

Пусть далѣе

$$\overline{\xi'} \quad \text{и} \quad \overline{\xi''}$$

будутъ два смежныхъ корня уравненія

$$\overline{\omega_m}(z)=0,$$

т. е. уравненія

$$e^{z^2}\frac{d^m e^{-z^2}}{dz^m}=0,$$

между которыми лежитъ число α, такъ что

$$\overline{\xi'}<\alpha<\overline{\xi''}.$$

Примѣняя къ нашему специальному случаю неравенства Чебышева (12), находимъ

$$\sum^{\overline{\xi}<\overline{\xi'}} \overline{\rho} < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2}\,dx < \sum^{\overline{\xi}\leqq\overline{\xi''}} \overline{\rho}$$

и отсюда выводимъ неравенства

$$\sum^{\overline{\xi}<\overline{\xi'}} \overline{\rho} > \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2}\,dx - \varepsilon'$$

и

$$\sum^{\overline{\xi}\leqq\overline{\xi''}} \overline{\rho} < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2}\,dx + \varepsilon',$$

принимая во вниманіе, что разность

$$\sum^{\overline{\xi}\leqq\overline{\xi''}} \overline{\rho} - \sum^{\overline{\xi}<\overline{\xi'}} \overline{\rho}$$

равна суммѣ двухъ значеній $\overline{\rho}$, соотвѣтствующихъ

$$\overline{\xi} = \overline{\xi'} \quad \text{и} \quad \overline{\xi} = \overline{\xi''}.$$

Съ другой стороны, въ силу указанной нами непрерывности корней уравненія

$$\omega_m(z) = 0$$

и соотвѣтствующихъ имъ количествъ ρ, можемъ утверждать, что коль скоро числовыя величины разностей

$$\sum_x px^k - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^k\,dx,$$

при

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots, 2m - 1,$$

всѣ будутъ меньше нѣкотораго достаточно малаго числа λ, будутъ имѣть мѣсто слѣдующія обстоятельства:

1) ни одно изъ чиселъ ξ, т. е. ни одинъ изъ корней уравненія

$$\omega_m(z) = 0,$$

не будетъ совпадать съ числомъ α, такъ что среди нихъ найдутся два смежныхъ числа

$$\xi', \quad \xi''$$

удовлетворяющія неравенствамъ

$$\xi' < \alpha < \xi'';$$

2) числовыя величины обѣихъ разностей

$$\sum^{\xi<\xi'} \rho - \sum^{\overline{\xi}<\overline{\xi'}} \overline{\rho} \quad \text{и} \quad \sum^{\xi \leqq \xi''} \rho - \sum^{\overline{\xi} \leqq \overline{\xi''}} \overline{\rho}$$

будутъ меньше даннаго числа ε''.

Пусть λ настолько мало, что указанныя обстоятельства имѣютъ мѣсто, коль скоро выполняются неравенства

$$-\lambda < \sum_x p x^k - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^k \, dx < \lambda$$

при

$$k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2m - 1.$$

Предполагая введенныя нами числа

$$\varepsilon, \ \varepsilon', \ \varepsilon'', \ l, \ m, \ \lambda$$

неизмѣнными, будемъ увеличивать число n.

Согласно основному условію теоремы, при достаточно большихъ значеніяхъ n, т. е. при всѣхъ n, превосходящихъ нѣкоторое опредѣленное число ν, только что приведенныя неравенства обязательно будутъ выполняться.

И для всѣхъ этихъ значеній n обѣ суммы

$$\sum^{x<\alpha} p \quad \text{и} \quad \sum^{x \leqq \alpha} p$$

будутъ отличаться отъ

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2} \, dx$$

менѣе чѣмъ на ε.

Въ самомъ дѣлѣ, въ силу неравенствъ Чебышева (12) имѣемъ

$$\sum^{\xi<\xi'}\rho \leqq \sum^{x<\alpha} p \leqq \sum^{x\leqq\alpha} p \leqq \sum^{\xi\leqq\xi''}\rho.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ, при

$$n > \nu,$$

должно быть

$$\sum^{\xi<\xi'}\rho > \sum^{\overline{\xi}<\overline{\xi'}}\overline{\rho} - \varepsilon''$$

и

$$\sum^{\xi\leqq\xi}\rho < \sum^{\overline{\xi}\leqq\overline{\xi''}}\overline{\rho} + \varepsilon''.$$

Присоединяя же къ этимъ неравенствамъ установленныя раньше

$$\sum^{\overline{\xi}<\overline{\xi'}}\overline{\rho} > \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2}\,dx - \varepsilon'$$

и

$$\sum^{\overline{\xi}\leqq\overline{\xi''}}\overline{\rho} < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2}\,dx + \varepsilon',$$

легко убѣждаемся, что обѣ суммы

$$\sum^{\xi<\xi'}\rho \quad \text{и} \quad \sum^{\xi\leqq\xi''}\rho,$$

при $n > \nu$, разнятся отъ

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2}\,dx$$

менѣе чѣмъ на

$$\varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon.$$

А отсюда тотчасъ слѣдуетъ, что и обѣ суммы

$$\sum^{x<\alpha} p \quad \text{и} \quad \sum^{x\leqq\alpha} p,$$

лежащія между

$$\sum^{\xi<\xi'}\rho \quad \text{и} \quad \sum^{\xi\leqq\xi''}\rho,$$

при выполненіи указанныхъ условій, т. е. при всѣхъ достаточно большихъ значеніяхъ n, будутъ разнится отъ

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2}\,dx$$

менѣе чѣмъ на ε.

Теорема наша, такимъ образомъ, доказана. А изъ нея вытекаетъ слѣдствіе, которымъ мы будемъ пользоваться.

Слѣдствіе. Каковы бы ни были данныя числа t_1 и t_2, второе изъ которыхъ больше перваго, при соблюденіи условій вышеприведенной теоремы, четыре суммы

$$\sum^{t_1<x<t_2} p, \quad \sum^{t_1\leqq x<t_2} p, \quad \sum^{t_1<x\leqq t_2} p, \quad \sum^{t_1\leqq x\leqq t_2} p,$$

распространенныя на всѣ значенія x, которыя удовлетворяютъ неравенствамъ

$$t_1 < x < t_2,$$

съ присоединеніемъ, или исключеніемъ, значеній

$$x = t_1 \quad \text{и} \quad x = t_2,$$

стремятся къ одному предѣлу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-x^2}\,dx.$$

Разсматривая наконецъ положительныя числа p какъ вѣроятности соотвѣтствующихъ значеній x, мы можемъ представить это слѣдствіе въ видѣ теоремы, относящейся къ исчисленію вѣроятностей, чѣмъ мы и закончимъ статью.

Заключительная теорема. *Если совокупность всѣхъ возможныхъ значеній нѣкоторой вещественной величины x, вмѣстѣ съ ихъ вѣроятностями, измѣняется такъ, что для всякаго даннаго цѣлаго положительнаго числа m математическое ожиданіе x^m стремится къ предѣлу*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^m\,dx,$$

то вѣроятность выполненія неравенствъ

$$t_1 < x < t_2,$$

съ присоединеніемъ или безъ присоединенія крайнихъ значеній

$$x = t_1 \quad \text{и} \quad x = t_2,$$

должна стремиться къ предѣлу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt,$$

каковы бы ни были данныя числа t_1 *и* $t_2 > t_1$.

Если сопоставить эту теорему съ доказанной въ главѣ III (§ 18) теоремой о математическихъ ожиданіяхъ, то получится теорема о предѣлѣ вѣроятности, при тѣхъ предположеніяхъ, которыя были приняты въ теоремѣ главы III. Но мы на этомъ не остановимся, такъ какъ предложеніе, которое мы могли бы сейчасъ установить, представляетъ только частный случай того, которое будетъ предметомъ слѣдующей статьи.

Литература.

Stieltjes, T. J. Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques (Ann. de l'Ec. nor. 3 sér. I, 1884).

Possé, C. Sur quelques applications des fractions continues algébriques. St. Pétersbourg 1886.

Stieltjes, T. J. Recherches sur les fractions continues (Ann. de la Fac. de Toulouse VII). Paris 1902.

А. Марковъ. Исчисленіе конечныхъ разностей. 2-ое изд. 1911.

Теорема о предѣлѣ вѣроятности для случаевъ академика А. М. Ляпунова.

Приближенное выраженіе вѣроятности въ видѣ интеграла, указанное нами въ § 17, было извѣстно давно и, по справедливости, должно быть связано съ именемъ Лапласа.

Но теорема, что этотъ интегралъ представляетъ предѣлъ вѣроятности, была, за исключеніемъ случая Бернулли *), впервые высказана и доказана для опредѣленныхъ случаевъ Чебышевымъ въ мемуарѣ **) «Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités».

Въ этомъ замѣчательномъ мемуарѣ, ясно показавшемъ значеніе метода математическихъ ожиданій, оставались нѣкоторые пробѣлы, какъ въ формулировкѣ такъ и въ доказательствѣ теоремы; они пополнены мною въ статьяхъ «Законъ большихъ чиселъ и способъ наименьшихъ квадратовъ» ***) и «Sur les racines de l'équation $e^{x^2}\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}=0$».

Такимъ образомъ были установлены условія, при соблюденіи которыхъ теорема о предѣлѣ вѣроятности несомнѣнно должна имѣть мѣсто; этихъ условій достаточно для существо-

---

*) Для этого случая доказательство ея, названное мною доказательствомъ Лапласа, было уже намѣчено Моавромъ въ Miscellanea analytica (1730 г.).

**) Сочиненія П. Л. Чебышева. Томъ II, 481—491.

***) Изв. Физ.-мат. общества при Казанскомъ универ. 2 серія. Т. VIII, 1898.

ванія теоремы и они являлись необходимыми, чтобы можно было придти къ ней путемъ извѣстныхъ простыхъ разсужденій.

Впослѣдствіи академикъ А. М. Ляпуновъ поставилъ себѣ цѣлью придти къ теоремѣ о предѣлѣ вѣроятности инымъ путемъ, дополняя надлежащимъ образомъ обычный выводъ приближенной формулы, и вмѣстѣ съ тѣмъ установить эту теорему для возможно большаго числа случаевъ, что и сдѣлано имъ въ мемуарахъ*) «Sur une proposition de la théorie des probabilités» и «Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité».

Общность выводовъ въ послѣдней работѣ А. М. Ляпунова далеко превзошла ту, которая была достигнута методомъ математическихъ ожиданій. Достигнуть столь общихъ выводовъ, методомъ математическихъ ожиданій, казалось даже невозможнымъ, ибо онъ основанъ на разсмотрѣніи такихъ математическихъ ожиданій, въ неограниченномъ числѣ, существованія которыхъ въ случаяхъ А. М. Ляпунова не предполагается.

Для возстановленія поколебленнаго такимъ образомъ значенія метода математическихъ ожиданій необходимо было выяснить, что вышеупомянутыми работами онъ далеко не исчерпанъ до конца. Объ этой задачѣ я думалъ довольно долго, и мнѣ удалось рѣшить ее, можно сказать, въ двухъ направленіяхъ. Съ одной стороны, я нашелъ, какъ надо дополнить методъ математическихъ ожиданій, чтобы охватить всѣ случаи А. М. Ляпунова; а съ другой стороны, рядъ моихъ работъ показалъ, что тотъ же методъ даетъ довольно легкое средство для распространенія предѣльной теоремы на связанныя величины. Изъ послѣднихъ работъ я изложу здѣсь, въ измѣненномъ видѣ, только одну; но сначала мы займемся доказательствомъ предѣльной теоремы для случаевъ А. М. Ляпунова.

Пусть будетъ

$$Z_1,\ Z_2, \ldots, Z_k, \ldots, Z_n, \ldots$$

---

*) Bull. de l'Acad. des sciences de St. Pétersb. V série, T. XIII. Mem. de l'Acad. de St. Pétersb. VIII série, T. XII.

неограниченный рядъ независимыхъ величинъ; пусть вмѣстѣ съ тѣмъ, при всякомъ k, существуютъ

$$a_k = \text{м. о.}\, Z_k,\quad b_k = \text{м. о.}\, (Z_k - a_k)^2$$

и

$$b_k^{(2+\delta)} = \text{м. о.}\, |Z_k - a_k|^{2+\delta},$$

гдѣ δ нѣкоторое положительное число, а символъ $|V|$ для любого количества V означаетъ абсолютную его величину.

Положимъ, наконецъ, что отношеніе

$$\frac{b_1^{(2+\delta)} + b_2^{(2+\delta)} + \ldots + b_n^{(2+\delta)}}{(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^{1+\frac{\delta}{2}}}$$

приближается къ предѣлу нуль, когда n безпредѣльно возрастаетъ.

Таковы условія А. М. Ляпунова. Намъ надо доказать, что при соблюденіи ихъ оправдывается теорема о предѣлѣ вѣроятности: *для любыхъ данныхъ чиселъ t_1 и t_2, изъ которыхъ второе больше перваго, вѣроятность неравенствъ*

$$t_1 < \frac{Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_n}{\sqrt{2(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)}} < t_2$$

стремится къ предѣлу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2}\, dt,$$

когда n возрастаетъ безпредѣльно.

Для этой цѣли введемъ вспомогательное число N, которое будемъ увеличивать безпредѣльно вмѣстѣ съ n и совокупность всѣхъ возможныхъ значеній каждой разности

$$Z_k - a_k$$

разобьемъ на двѣ совокупности, одну изъ которыхъ пусть составятъ числа X_k, лежащія между $-N$ и $+N$, а другую — числа Y_k, лежащія внѣ этихъ предѣловъ. Предполагая, что

$$Y_k = 0 \quad \text{при} \quad -N \leqq Z_k - a_k \leqq +N$$

и

$$X_k = 0 \text{ при } Z_k - a_k < -N \text{ и при } Z_k - a_k > N,$$

мы можемъ положить

$$Z_k - a_k = X_k + Y_k;$$

вмѣстѣ съ тѣмъ нетрудно установить равенства

$$\text{м. о.}(Z_k - a_k) = 0 = \text{м. о.}\, X_k + \text{м. о.}\, Y_k,$$

$$b_k = \text{м. о.}\, X_k^2 + \text{м. о.}\, Y_k^2,$$

$$b_k^{(2+\delta)} = \text{м. о.} \mid X_k \mid^{2+\delta} + \text{м. о.} \mid Y_k \mid^{2+\delta}.$$

Математическихъ ожиданій другихъ степеней

$$Z_k - a_k, \quad |Z_k - a_k|, \quad Y_k \text{ и } |Y_k|,$$

при условіяхъ А. М. Ляпунова, мы не должны разсматривать. Но какъ бы велико ни было введенное нами число N, мы можемъ разсматривать математическія ожиданія любыхъ положительныхъ степеней X_k и $|X_k|$. Введемъ слѣдующія обозначенія

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = B_n, \quad b_1^{(2+\delta)} + b_2^{(2+\delta)} + \ldots + b_n^{(2+\delta)} = B'_n$$

$$|\text{м. о.}\, X_k| = |\text{м. о.}\, Y_k| = c_k^{(1)}, \quad |\text{м. о.}\, X_k^\alpha| = c_k^{(\alpha)}$$

при $\alpha = 2, 3, 4, \ldots$ Вмѣстѣ съ тѣмъ обозначимъ символомъ p_k вѣроятность равенства

$$Z_k - a_k = X_k$$

равносильнаго неравенствамъ

$$-N \leqq Z_k - a_k \leqq N,$$

и символомъ q_k вѣроятность противоположнаго равенства

$$Z_k - a_k = Y_k, \quad \text{при} \quad Y_k \text{ не } = 0,$$

иначе сказать вѣроятность неравенства

$$(Z_k - a_k)^2 > N^2;$$

такъ что
$$p_k + q_k = 1.$$

Вспомогательное число N, возрастающее безпредѣльно вмѣстѣ съ n, мы подчинимъ двумъ условіямъ. И прежде всего постараемся распорядиться числомъ N такъ, чтобы разность между вѣроятностью неравенствъ

$$t_1 < \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{2\sqrt{B_n}} < t_2$$

и вѣроятностью неравенствъ

$$t_1 < \frac{Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_n}{2\sqrt{B_n}} < t_2$$

приближалась къ предѣлу нуль вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$.

Такъ какъ первыя неравенства равносильны вторымъ во всѣхъ случаяхъ, когда

$$Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_n = 0,$$

то числовая величина разности между вѣроятностями ихъ не можетъ превзойти вѣроятности нарушенія по крайней мѣрѣ одного изъ равенствъ

$$Y_1 = 0,\ Y_2 = 0, \ldots,\ Y_n = 0;$$

а эта послѣдняя вѣроятность, какъ нетрудно видѣть, не больше суммы

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n.$$

Обращаясь къ суммѣ

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n$$

и принимая во вниманіе равенство

$$b_k^{(2+\delta)} = \text{м. о.}\,|X_k|^{2+\delta} + \text{м. о.}\,|Y_k|^{2+\delta},$$

устанавливаемъ неравенство

$$q_k < \frac{b_k^{(2+\delta)}}{N^{2+\delta}}$$

и отсюда выводимъ

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n < \frac{B'_n}{N^{2+\delta}}.$$

Сообразно этому мы подчинимъ число N условію, чтобы дробь

$$\frac{B'_n}{N^{2+\delta}}$$

приближалась къ предѣлу нуль вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$. При соблюденіи такого условія разность между вѣроятностью неравенствъ

$$t_1 < \frac{Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_n}{\sqrt{2B_n}} < t_2$$

и вѣроятностью неравенствъ

$$t_1 < \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{2B_n}} < t_2$$

должна, согласно вышеприведеннымъ объясненіямъ, приближаться къ предѣлу нуль вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$; и слѣдовательно, при разысканіи предѣла вѣроятности первыхъ неравенствъ мы можемъ замѣнить ихъ вторыми.

Обращаясь къ разысканію предѣла вѣроятности этихъ вторыхъ неравенствъ

$$t_1 < \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{2B_n}} < t_2,$$

мы подчинимъ N другому условію, при соблюденіи котораго, вмѣстѣ съ первымъ, нетрудно для всякаго положительнаго числа m установить формулу

$$\underset{n=\infty}{\text{пред. м. о.}} \left\{\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{2B_n}}\right\}^m = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^m \, dt,$$

что, въ силу заключительной теоремы предыдущей статьи, немедленно приведетъ насъ къ цѣли.

При разсмотрѣніи математическаго ожиданія степени

$$\left\{\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{2B_n}}\right\}^m$$

намъ придется повторить вычисленія главы III, § 18.

Согласно обобщенной формулѣ Ньютона имѣемъ

$$\left\{\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{\sqrt{2B_n}}\right\}^m=\sum\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}\cdot\frac{S^{\alpha,\,\beta,\ldots,\,\gamma}}{(2B_n)^{\frac{m}{2}}},$$

гдѣ α, $\beta,\ldots,$ λ цѣлыя положительныя числа (не нули), удовлетворяющія условію

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda=m$$

и $S^{\alpha,\,\beta,\ldots,\,\lambda}$ означаетъ симметрическую функцію величинъ

$$X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n,$$

которая опредѣляется однимъ ея членомъ

$$X_1^\alpha X_2^\beta\ldots X_i^\lambda.$$

Отсюда, въ силу теоремъ о математическихъ ожиданіяхъ суммъ и произведеній, выводимъ

$$\text{м. о.}\left\{\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{\sqrt{2B_n}}\right\}^m=\sum\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}\cdot\frac{G^{\alpha,\,\beta,\ldots,\,\lambda}}{(\sqrt{2B_n})^m},$$

гдѣ $G^{\alpha,\,\beta,\ldots\,\lambda}$ означаетъ математическое ожиданіе суммы $S^{\alpha,\,\beta,\ldots,\,\lambda}$ и получается изъ нея черезъ замѣну степеней величинъ

$$X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n$$

математическими ожиданіями тѣхъ же степеней.

Относительно выраженія

$$\frac{G^{\alpha,\,\beta,\ldots,\,\lambda}}{(\sqrt{2B_n})^m}$$

мы докажемъ, что при надлежащемъ выборѣ числа N оно будетъ приближаться къ предѣлу нуль вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$, для всякой возможной системы чиселъ α, $\beta,\ldots$ λ, кромѣ одной

$$\alpha=\beta=\ldots=\lambda=2,$$

которая возможна только при m четномъ.

Для намѣченной цѣли обратимъ вниманіе на простое нера-

венство

$$\frac{|G^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}|}{B_n^{\frac{m}{2}}} < \frac{c_1^{(\alpha)} + \ldots + c_n^{(\alpha)}}{B_n^{\frac{\alpha}{2}}} \cdots \frac{c_1^{(\lambda)} + \ldots + c_n^{(\lambda)}}{B_n^{\frac{\lambda}{2}}},$$

правая часть котораго составлена изъ множителей вида

$$\frac{c_1^{(e)} + c_2^{(e)} + \ldots + c_n^{(e)}}{B_n^{\frac{e}{2}}},$$

гдѣ e можетъ получать значенія 1, 2, 3, ...

Въ силу приведеннаго неравенства можно утверждать, что для всякой совокупности чиселъ

$$\alpha, \beta, \ldots, \lambda,$$

не состоящей изъ однихъ только двоекъ, отношеніе

$$\frac{G^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}}{B_n^{\frac{m}{2}}}$$

будетъ, навѣрно, стремиться къ предѣлу нуль вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$, если мы распорядимся числомъ N такъ, чтобы было

$$\text{пред.}_{n=\infty} \frac{c_1^{(e)} + c_2^{(e)} + \ldots + c_n^{(e)}}{B_n^{\frac{e}{2}}} = 0$$

при

$$e = 1,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots .$$

Относительно выраженія

$$\frac{c_1^{(2)} + c_2^{(2)} + \ldots + c_n^{(2)}}{B_n}$$

легко убѣдиться, что при значеніяхъ N, удовлетворяющихъ выше установленному условію, оно должно стремиться къ предѣлу 1, когда n возрастаетъ безпредѣльно. Въ самомъ дѣлѣ, сопоставляя равенство

$$c_k^{(2)} + \text{м. о. } Y_k^2 = b_k$$

съ неравенствомъ

$$\text{м. о. } Y_k^2 < \frac{b_k^{(2+\delta)}}{N^\delta},$$

въ справедливости котораго нетрудно убѣдиться, находимъ

$$b_k > c_k^{(2)} > b_k - \frac{b_k^{(2+\delta)}}{N^\delta},$$

откуда посредствомъ сложенія выводимъ

$$1 > \frac{c_1^{(2)} + c_2^{(2)} + \ldots + c_n^{(2)}}{B_n} > 1 - \frac{B'_n}{B_n N^\delta}.$$

Что же касается выраженія

$$\frac{B'_n}{B_n N^\delta},$$

то его можно представить въ видѣ произведенія двухъ множителей

$$\left(\frac{B'_n}{N^{2+\delta}}\right)^{\frac{\delta}{2+\delta}} \quad \text{и} \quad \left(\frac{B'_n}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}}\right)^{\frac{2}{2+\delta}},$$

которые при нашихъ условіяхъ оба стремятся къ предѣлу нуль вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$.

Нетрудно также убѣдиться, что условія, которому мы подчинили уже число N, достаточно для того, чтобы отношеніе

$$\frac{c_1^{(1)} + c_2^{(1)} + \ldots + c_n^{(1)}}{B_n^{\frac{1}{2}}}$$

приближалось къ предѣлу нуль вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$: это вытекаетъ изъ простыхъ неравенствъ

$$c_k^{(1)} < \text{м. о.} \mid Y_k \mid$$

и

$$\left\{\sum \text{м. о.} \mid Y_k \mid\right\}^2 < (q_1 + q_2 + \ldots + q_n) \sum \text{м. о.}\, Y_k^2 < B_n \sum q_k.$$

Обращаясь къ отношеніямъ

$$\frac{c_1^{(e)} + c_2^{(e)} + \ldots + c_n^{(e)}}{B_n^{\frac{e}{2}}}$$

при $e = 3, 4, 5, \ldots$, принимаемъ во вниманіе неравенство

$$c_k^{(e)} < N^{e-2}\, b_k$$

и на основаніи его находимъ

$$\frac{c_1^{(e)}+c_2^{(e)}+\ldots+c_n^{(e)}}{B_n^{\frac{e}{2}}}<\left(\frac{N^2}{B_n}\right)^{\frac{e-2}{2}}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что всѣ разсматриваемыя нами отношенія

$$\frac{c_1^{(e)}+c_2^{(e)}+\ldots+c_n^{(e)}}{B_n^{\frac{e}{2}}}$$

будутъ навѣрно стремиться къ предѣлу нуль вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$, если число N мы подчинимъ условію, чтобы отношеніе

$$\frac{N^2}{B_n}$$

стремилось къ предѣлу нуль вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$. Это новое условіе можетъ быть выполнено одновременно съ ранѣе установленнымъ, которое выражается равенствомъ

$$\text{пред.}_{n=\infty}\ \frac{B'_n}{N^{2+\delta}}=0.$$

Дѣйствительно, если положимъ

$$N=(B_n B'_n)^{\frac{1}{4+\delta}},$$

то обѣ дроби

$$\frac{N^2}{B_n} \quad \text{и} \quad \frac{B'_n}{N^{2+\delta}}$$

приведутся къ одному и тому же выраженію

$$\left(\frac{B'_n}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}}\right)^{\frac{2}{4+\delta}},$$

которое, въ силу одного изъ принятыхъ нами условій А. М. Ляпунова, должно стремиться къ предѣлу нуль вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$.

Итакъ, положивъ

$$N=(B_n B'_n)^{\frac{1}{4+\delta}},$$

мы можемъ утверждать, что разность между вѣроятностью не-

равенствъ

$$t_1 < \frac{Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_n}{\sqrt{2B_n}} < t_2$$

и вѣроятностью неравенствъ

$$t_1 < \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{2B_n}} < t_2$$

будетъ приближаться къ предѣлу нуль вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$, что отношеніе

$$\frac{c_1^{(2)} + c_2^{(2)} + \ldots + c_n^{(2)}}{B_n}$$

будетъ въ то же время приближаться къ предѣлу единица и что, наконецъ, въ суммѣ

$$\sum \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} \cdot \frac{G^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}}{(2B_n)^{\frac{m}{2}}},$$

равной математическому ожиданію

$$\left\{\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{2B_n}}\right\}^m,$$

будутъ стремиться къ предѣлу нуль, вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$, всѣ слагаемыя ея кромѣ одного, которое опредѣляется равенствами

$$\alpha = \beta = \ldots = \lambda = 2$$

и входитъ въ составъ этой суммы только при m четномъ.

Принимая же во вниманіе простое неравенство

$$(c_k^{(2)})^\alpha < N^{2\alpha-2} c_k^{(2)}$$

при

$$\alpha = 2,\ 3,\ 4, \ldots,$$

легко можемъ установить неравенство

$$\frac{(c_1^{(2)})^\alpha + \ldots + (c_n^{(2)})^\alpha}{B_n^\alpha} < \left(\frac{N^2}{B_n}\right)^{\alpha-1},$$

которое показываетъ, что при нашихъ условіяхъ приближаются къ предѣлу нуль, вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$, и всѣ отношенія вида

$$\frac{(c_1^{(2)})^\alpha + \ldots + (c_n^{(2)})^\alpha}{B_n^\alpha}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что при указанныхъ нами условіяхъ математическое ожиданіе любой положительной нечетной степени отношенія

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{2B_n}}$$

должно приближаться къ предѣлу нуль вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$.

Если же m число четное, то къ предѣлу нуль должны стремиться двѣ разности *)

$$\text{м. о.} \left\{\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{2B_n}}\right\}^n - \frac{m!}{2^{\frac{m}{2}}} \cdot \frac{G^{2,2,\ldots,2}}{(2B_n)^{\frac{m}{2}}}$$

и

$$\left(\frac{c_1^{(2)} + c_2^{(2)} + \ldots + c_n^{(2)}}{2B_n}\right)^{\frac{m}{2}} - \left(\frac{m}{2}!\right)\frac{G^{2,2,\ldots,2}}{(2B_n)^{\frac{m}{2}}}:$$

для второй разности это заключеніе основано на тождествѣ

$$\left\{\frac{c_1^{(2)} + c_2^{(2)} + \ldots + c_n^{(2)}}{2B_n}\right\}^{\frac{m}{2}} = \sum \frac{\frac{m}{2}!}{\mu!\,\nu!\ldots\omega!} \cdot \frac{H^{\mu,\nu,\ldots,\omega}}{(2B_n)^{\frac{m}{2}}}$$

и на неравенствѣ

$$H^{\mu,\nu,\ldots\omega} < \{(c_1^{(2)})^\mu + \ldots + (c_n^{(2)})^\mu\} \ldots \{(c_1^{(2)})^\omega + \ldots + (c_n^{(2)})^\omega\},$$

гдѣ $H^{\mu,\nu,\ldots,\omega}$ означаетъ симметрическую функцію величинъ $c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \ldots, c_n^{(2)}$, которая опредѣляется однимъ ея членомъ

$$(c_1^{(2)})^\mu (c_2^{(2)})^\nu \ldots (c_j^{(2)})^\omega.$$

Итакъ, при m нечетномъ

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\,\text{м. о.} \left\{\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{2B_n}}\right\}^m = 0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^m\, dt,$$

а при m четномъ

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\,\text{м. о.} \left\{\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{2B_n}}\right\}^m = \frac{m!}{2^m\left(\frac{m}{2}!\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^m\, dt,$$

*) Глава III, § 18.

что немедленно доставляетъ намъ вышеприведенную предѣльную теорему.

Подобнымъ же способомъ можно установить ее и въ нѣкоторыхъ другихъ случаяхъ.

Замѣтимъ, по примѣру А. М. Ляпунова, что его условія выполняются, если числовыя величины всѣхъ разностей $Z_k - a_k$ не превосходятъ одного и того-же неизмѣннаго числа и, вмѣстѣ съ тѣмъ, сумма

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

обозначенная символомъ B_n, возрастаетъ безпредѣльно вмѣстѣ съ n. Дѣйствительно, если при всѣхъ k выполняются неравенства

$$-L < Z_k - a_k < L,$$

гдѣ L постоянное положительное число; то для любого положительнаго числа δ имѣемъ

$$b_k^{(2+\delta)} = \text{м. о.} \left| Z_k - a_k \right|^{2+\delta} < L^\delta b_k$$

и потому

$$\frac{B_n'}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}} < \frac{L^\delta}{B_n^{\frac{\delta}{2}}},$$

откуда тотчасъ слѣдуетъ

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \frac{B_n'}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}} = 0,$$

если только B_n возрастаетъ безпредѣльно вмѣстѣ съ n.

И не трудно видѣть, что вышеизложенное доказательство теоремы о предѣлѣ вѣроятности, для этихъ послѣднихъ случаевъ, значительно упрощается, такъ какъ исчезаетъ надобность вводить вспомогательное число N и разбивать всѣ значенія $Z_k - a_k$ на двѣ совокупности.

Если же числовыя величины разностей

$$Z_k - a_k$$

могутъ быть произвольно большими, то для существованія

теоремы о предѣлѣ вѣроятностей недостаточно одного безпредѣльнаго возрастанія суммы

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

какъ показываетъ мой примѣръ.

Примѣръ. Пусть Z_k, при достаточно большихъ значеніяхъ k, можетъ имѣть три значенія

$$0,\ (\log k)^\mu,\ -(\log k)^\mu,$$

вѣроятности которыхъ соотвѣтственно равны

$$1 - \frac{2}{k(\log k)^\nu},\ \frac{1}{k(\log k)^\nu},\ \frac{1}{k(\log k)^\nu},$$

гдѣ μ и ν данныя положительныя числа и

$$2\mu - \nu + 1 > 0;$$

для прочихъ же величинъ k пусть $Z_k = 0$, такъ что въ суммѣ

$$Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$$

отпадаетъ опредѣленное число k_0 первыхъ членовъ.

Въ этомъ случаѣ имѣемъ:

$$a_k = 0 \text{ при всѣхъ значеніяхъ } k$$

$$\text{м. о. } |Z_k|^i = 0 \text{ при } k \leqq k_0$$

$$\text{м. о. } Z_k^2 = b_k = \frac{2(\log k)^{2\mu-\nu}}{k} \text{ при } k > k_0$$

и вообще

$$\text{м. о. } |Z_k|^i = \frac{2(\log k)^{i\mu-\nu}}{k} \text{ при } k > k_0,$$

для любого положительнаго числа i.

Слѣдовательно для нашего примѣра

$$B_n = \frac{2\{\log(k_0+1)\}^{2\mu-\nu}}{k_0+1} + \ldots + \frac{2\{\log n\}^{2\mu-\nu}}{n}$$

и

$$B'_n = \frac{2\{\log(k_0+1)\}^{(2+\delta)\mu-\nu}}{k_0+1} + \ldots + \frac{2\{\log n\}^{(2+\delta)\mu-\nu}}{n}.$$

Сравнивая последнія суммы съ соотвѣтствующими интегралами, легко усматриваемъ, что отношенія

$$\frac{B_n}{(\log n)^{2\mu-\nu+1}} \text{ и } \frac{B'_n}{(\log n)^{(2+\delta)\mu-\nu+1}}.$$

не могутъ возрастать безпредѣльно и не могутъ становиться произвольно малыми. Поэтому и произведеніе

$$\frac{B'_n}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}}\cdot(\log n)^{(1-\nu)\frac{\delta}{2}},$$

равное

$$\frac{B'_n}{(\log n)^{(2+\delta)\mu-\nu+1}}:\left(\frac{B_n}{(\log n)^{2\mu-\nu+1}}\right)^{1+\frac{\delta}{2}},$$

также не можетъ ни безпредѣльно возрастать ни становиться произвольно малымъ.

Отсюда тотчасъ заключаемъ, что при $\nu<1$ условіе А. М. Ляпунова

$$\text{пред.}_{n=\infty}\left(\frac{B'_n}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}}\right)=0$$

выполнено и, слѣдовательно, теорема о предѣлѣ вѣроятности имѣетъ мѣсто.

Напротивъ, при $\nu\geqq 1$ условіе А. М. Ляпунова, очевидно, не выполняется, что однако не доказываетъ еще непримѣнимости къ данному случаю предѣльной теоремы, ибо это условіе установлено какъ достаточное, но не какъ необходимое.

При $\nu>1$ и достаточно большихъ величинахъ k_0, мы легко можемъ обнаружить эту непримѣнимость, разсматривая вѣроятность, что сумма

$$Z_1+Z_2+\ldots+Z_n$$

точно равна нулю. Если бы теорема о предѣлѣ вѣроятности, въ данномъ случаѣ, имѣла мѣсто, то вѣроятность равенства

$$Z_1+Z_2+\ldots+Z_n=0$$

приближалась бы къ предѣлу нуль, при безпредѣльномъ возрастаніи n.

Между тѣмъ нетрудно видѣть, что вѣроятность нарушенія этого равенства не больше суммы вѣроятностей равенствъ

$$Z_{k_0+1} = \pm (\log(k_0+1))^\mu, \ldots, Z_n = \pm (\log n)^\mu,$$

которая составляетъ часть безконечной суммы

$$\frac{2}{(k_0+1)\{\log(k_0+1)\}^\nu} + \ldots + \frac{2}{(k_0+i)\{\log(k_0+i)\}^\nu}, \ldots$$

и потому должна оставаться меньше

$$\frac{2}{(\nu-1)(\log k_0)^{\nu-1}},$$

какъ бы велико ни было число n. Поэтому, взявъ k_0 настолько большимъ, чтобы дробь

$$\frac{2}{(\nu-1)(\log k_0)^{\nu-1}}$$

была меньше единицы, мы можемъ утверждать, что вѣроятность равенства

$$Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = 0$$

постоянно остается больше положительнаго числа

$$1 - \frac{2}{(\nu-1)(\log k_0)^{\nu-1}}$$

и слѣдовательно не стремится къ предѣлу нуль.

Напримѣръ, при

$$\nu = 2 \text{ и } k_0 = 10$$

вѣроятность равенства

$$Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = 0$$

постоянно больше

$$1 - \frac{2}{\log 10} > \frac{1}{8}.$$

Такимъ образомъ непримѣнимость теоремы о предѣлѣ вѣроятности къ указаннымъ сейчасъ случаямъ, при $\nu > 1$, выяснена, при чемъ въ силу неравенства

$$2\mu - \nu + 1 > 0$$

сумма

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = B_n$$

возрастаетъ у насъ безпредѣльно вмѣстѣ съ n.

Замѣчательный случай испытаній связанныхъ въ цѣпь.

Въ этой статьѣ мы будемъ разсматривать неограниченный рядъ послѣдовательныхъ испытаній, которыя отмѣтимъ, по порядку, нумерами

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ k,\ k+1, \ldots$$

Наши испытанія будутъ связаны, относительно нѣкотораго событія E, въ *простую цѣпь*, которая немедленно раздѣляется на двѣ части, какъ только для одного изъ испытаній установлено, появилось ли при немъ событіе E или нѣтъ: слѣдующія за нимъ испытанія становятся независимыми отъ предшествующихъ ему.

Останавливаясь здѣсь только на замѣчательномъ частномъ случаѣ такой цѣпи, который соотвѣтствуетъ случаю Бернулли для независимыхъ испытаній, мы будемъ считать установленными для всей цѣпи одни и тѣ же два числа

$$p_1,\ p_2,$$

вмѣсто одного числа p случая Бернулли.

Число p_1 означаетъ вѣроятность событія E при $k+1^{\text{мъ}}$ испытаніи, если дано, что E появилось при $k^{\text{мъ}}$ испытаніи, а результаты слѣдующихъ за нимъ испытаній остаются неопредѣленными. Число p_2 означаетъ также вѣроятность событія E при $k+1^{\text{мъ}}$ испытаніи, пока результаты испытаній съ нумерами

$$k+1,\ k+2,\ k+3, \ldots$$

остаются неопредѣленными, но только при заданіи, что k^{oe} испытаніе привело къ появленію не событія E, а противоположнаго ему событія F. Согласно вышеприведенному объясненію связи испытаній въ *простую цѣпь*, указанныя вѣроятности событія E, при $k+1^{мъ}$ испытаніи, устанавливаются совершенно независимо отъ результатовъ первыхъ $k-1$ испытаній и, при полномъ или частномъ выясненіи этихъ результатовъ, должны оставаться неизмѣнными.

Чтобы сообщить нашимъ выводамъ полную опредѣленность, слѣдуетъ ввести еще число p', представляющее вѣроятность событія E при первомъ испытаніи, пока ихъ результаты, вообще, остаются неопредѣленными. Однако въ окончательныхъ нашихъ выводахъ послѣднее число не играетъ никакой роли.

Вмѣстѣ съ числами

$$p_1,\ p_2,\ p'$$

мы введемъ въ наши вычисленія, для сокращенія письма и для симметріи формулъ, ихъ дополненія до единицы

$$q_1 = 1 - p_1,\ q_2 = 1 - p_2,\ q' = 1 - p',$$

представляющія вѣроятности событія F, противоположнаго E.

Наше изслѣдованіе начнемъ съ разсмотрѣнія ряда чиселъ

$$p',\ p'',\ p''',\dots,\ p^{(k)},\ p^{(k+1)},\dots,$$

соотвѣтственно представляющихъ вѣроятности событія E при испытаніяхъ

$$1,\ 2,\ 3,\dots,\ k,\ k+1,\dots,$$

пока результаты ихъ, вообще, остаются неопредѣленными.

На основаніи теоремъ сложенія и умноженія вѣроятностей находимъ

$$p'' = p'p_1 + (1 - p')p_2,$$

$$p''' = p''p_1 + (1 - p'')p_2$$

и вообще

$$p^{(k+1)} = p^{(k)}p_1 + (1 - p^{(k)})p_2.$$

Этому общему уравненію можно придать такой видъ

$$p^{(k+1)}-p=\delta(p^{(k)}-p),$$

если δ и p опредѣлить равенствами

$$\delta=p_1-p_2,\ p_2=p(1-\delta),$$

при чемъ мы исключаемъ случай $\delta=1$, не представляющій интереса. Не представляетъ интереса и случай $\delta=-1$, который мы тоже исключимъ; такъ что у насъ будетъ

$$-1<\delta<+1.$$

Введя числа

$$p,\ q=1-p \text{ и } \delta,$$

мы можемъ выразить посредствомъ ихъ числа p_1, p_2, q_1, q_2 простыми формулами

$$(1)\qquad \begin{aligned} p_1&=p+\delta q,\ q_1=q-\delta q,\\ p_2&=p-\delta p,\ q_2=q+\delta p, \end{aligned}$$

а изъ уравненія, связывающаго $p^{(k+1)}$ съ $p^{(k)}$, находимъ общую формулу

$$p^{(k)}=p+(p'-p)\,\delta^{k-1},$$

откуда видно, что p служитъ предѣломъ, къ которому стремится $p^{(k)}$, когда k возрастаетъ безпредѣльно.

Переходимъ къ разсмотрѣнію вѣроятностей различныхъ предположеній о числѣ появленій E при n послѣдовательныхъ испытаній съ нумерами

$$1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n.$$

При одномъ первомъ испытаніи это число, которое вообще мы будемъ обозначать буквою m, можетъ имѣть два значенія

$$1 \text{ и } 0,$$

вѣроятности которыхъ, согласно вышеустановленному, равны

$$p' \text{ и } q'.$$

При $n = 2$ имѣемъ три предположенія

$$m = 2, \; m = 1, \; m = 0,$$

и ихъ вѣроятности, соотвѣтственно, равны

$$p'p_1, \; p'q_1 + q'p_2, \; q'q_2.$$

При $n = 3$ для четырехъ возможныхъ случаевъ

$$m = 3, \; m = 2, \; m = 1, \; m = 0$$

находимъ такія вѣроятности

$$p'p_1p_1, \; p'p_1q_1 + p'q_1p_2 + q'p_2p_1, \; p'q_1q_2 + q'p_2q_1 + q'q_2p_2, \; q'q_2q_2.$$

Для общихъ выводовъ введемъ новыя обозначенія. Пусть

$$P_{m,k}$$

означаетъ вѣроятность, что въ первыя k испытаній событіе E появится ровно m разъ; пусть далѣе

$$A_{m,k} \text{ и } B_{m,k}$$

означаютъ такія же вѣроятности какъ и $P_{m,k}$, но при добавочномъ требованіи, которое для $A_{m,k}$ состоитъ въ появленіи E при $k^{\text{мъ}}$ испытаніи, а для $B_{m,k}$—въ появленіи F при $k^{\text{мъ}}$ испытаніи; такъ что

(2) $$P_{m,k} = A_{m,k} + B_{m,k}.$$

Введемъ затѣмъ произвольное число ξ и станемъ разсматривать его функціи трехъ видовъ

(3) $$\varphi_k = \sum A_{m,k}\xi^m, \; \psi_k = \sum B_{m,k}\xi^m, \; \omega_k = \sum P_{m,k}\xi^m,$$

которыя очевидно связаны простою формулою

(4) $$\omega_k = \varphi_k + \psi_k.$$

При такихъ обозначеніяхъ, переходя отъ k испытаній къ $k+1$ испытаніямъ, мы можемъ установить, на основаніи теоремъ

сложенія и умноженія вѣроятностей, слѣдующія формулы

$$(5)\qquad \begin{aligned} A_{m,k+1} &= p_1 A_{m-1,k} + p_2 B_{m-1,k}, \\ B_{m,k+1} &= q_1 A_{m,k} + q_2 B_{m,k}, \end{aligned}$$

въ силу которыхъ имѣемъ

$$(6)\qquad \begin{aligned} \varphi_{k+1} &= p_1 \xi \varphi_k + p_2 \xi \psi_k, \\ \psi_{k+1} &= q_1 \varphi_k + q_2 \psi_k. \end{aligned}$$

Изъ уравненій (6), посредствомъ исключенія функцій ψ или φ, нетрудно получить для функцій обоихъ видовъ совершенно одинаковыя уравненія

$$\varphi_{k+2} - (p_1 \xi + q_2) \varphi_{k+1} + (p_1 - p_2) \xi \varphi_k = 0,$$
$$\psi_{k+2} - (p_1 \xi + q_2) \psi_{k+1} + (p_1 - p_2) \xi \psi_k = 0,$$

изъ которыхъ посредствомъ сложенія выводимъ такое же уравненіе и для функцій третьяго вида

$$(7)\qquad \omega_{k+2} - (p_1 \xi + q_2) \omega_{k+1} + (p_1 - p_2) \xi \omega_k = 0.$$

Слѣдовательно, если мы введемъ новое произвольное число t и положимъ

$$(8)\qquad \Omega(\xi, t) = \omega_0 + \omega_1 t + \omega_2 t^2 + \omega_3 t^3 + \ldots,$$

опредѣляя ω_0 равенствомъ

$$(9)\qquad \omega_2 - (p_1 \xi + q_2) \omega_1 + (p_1 - p_2) \xi \omega_0 = 0,$$

то должно быть

$$\Omega(\xi, t) = \frac{L_0 + L_1 t}{1 - (p_1 \xi + q_2) t + (p_1 - p_2) \xi t^2},$$

$$L_0 = \omega_0, \quad L_1 = \omega_1 - (p_1 \xi + q_2) \omega_0.$$

Съ другой стороны, имѣемъ

$$\omega_1 = p' \xi + q', \quad \omega_2 = p' p_1 \xi^2 + (p' q_1 + q' p_2) \xi + q' q_2$$

и изъ уравненія (9) находимъ

$$\omega_0 = 1,$$

откуда выводимъ

$$L_0 = 1,\ L_1 = (p' - p_1)\xi + q' - q_2.$$

Подставляя эти величины L_0 и L_1 въ указанное выраженіе $\Omega(\xi, t)$ и принимая во вниманіе формулы (1), мы приходимъ наконецъ къ равенству

(10) $$\Omega(\xi, t) = \frac{1 + \{(p' - p_1)\xi + q' - q_2\}t}{1 - \{(p + \delta q)\xi + q + \delta p\}t + \delta\xi t^2},$$

которое можетъ служить для опредѣленія всѣхъ функцій ω_n.

Мы имъ воспользуемся для вывода теоремы о предѣлѣ вѣроятностей, соотвѣтствующей нашей цѣпи испытаній.

Нашъ выводъ начнемъ съ разсмотрѣнія математическихъ ожиданій различныхъ цѣлыхъ положительныхъ степеней разности

$$m - np,$$

гдѣ m означаетъ число появленій событія E при n испытаніяхъ, отмѣченныхъ нумерами

$$1,\ 2,\ 3, \ldots, n.$$

Нетрудно замѣтить, что математическое ожиданіе выраженія $(m - np)^i$, равное суммѣ

$$\sum_m P_{m,n}(m - np)^i = P_{0,n}(-np)^i + P_{1,n}(1 - np)^i + \ldots,$$

можно, для любого цѣлаго положительнаго числа i, получить слѣдующимъ образомъ, если имѣемъ ω_n: вводимъ новое число u, связанное съ ξ уравненіемъ

$$\xi = e^u,$$

составляемъ производную

$$\frac{d^i\left(e^{-npu}\,\omega_n\right)}{du^i}$$

и наконецъ, положивъ въ ней $u = 0$, получаемъ въ результатѣ разсматриваемое математическое ожиданіе $(m - np)^i$.

Отсюда, принимая во вниманіе формулу (8), которая связываетъ функціи ω_n съ $\Omega(\xi, t)$, заключаемъ, что

$$\text{м. о.}\,(m - np)^i$$

можно опредѣлить какъ коэффиціентъ при t^n въ разложеніи, по возрастающимъ степенямъ t, слѣдующаго выраженія

$$\left\{\frac{d^i\,\Omega(e^u,\, te^{-pu})}{du^i}\right\}_{u=0},$$

къ изслѣдованію котораго мы и приступимъ.

Въ силу формулы (10) это выраженіе приводится къ раціональной функціи числа t, знаменатель которой не можетъ содержать иныхъ простыхъ множителей, кромѣ дѣлителей выраженія

$$\{1 - \{(p + \delta q)\xi + q + \delta p\}\,t + \delta\xi t^2\}_{\xi=1},$$

которое равно

$$1 - (1 + \delta)\,t + \delta t^2$$

и разлагается на два множителя

$$(1 - t)(1 - \delta t).$$

Слѣдовательно наша раціональная функція числа t разлагается на простѣйшія дроби двухъ видовъ

$$\frac{G}{(1-t)^j} \text{ и } \frac{H}{(1-\delta t)^l}.$$

Для дробей перваго вида имѣемъ

$$\frac{G}{(1-t)^j} = D_0 + D_1 t + D_2 t^2 + \ldots + D_n t^n + \ldots,$$

(11)
$$D_n = G\,\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+j-1)}{1.2.3\ldots(j-1)}$$

и потому

(12) $$\lim_{n=\infty}\left\{\frac{D_n}{n^{j-1}}\right\} = \frac{G}{1.2\ldots(j-1)}, \quad \lim_{n=\infty}\left\{\frac{D_n}{n^{j-1+\varepsilon}}\right\} = 0,$$

гдѣ ε любое неизмѣнное положительное число, для дробей второго

вида имѣемъ

$$\frac{H}{(1-\delta t)^l} = R_0 + R_1 t + R_2 t^2 + \ldots + R_n t^n + \ldots,$$

(13)

$$R_n = H \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+l-1)}{1.2.3\ldots(l-1)} \delta^n$$

и потому

(14) $$\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\ R_n = 0.$$

Мы имѣемъ въ виду доказать, что при безпредѣльномъ возрастаніи числа n отношеніе

$$\frac{\text{м. о.}\,(m-np)^i}{n^{\frac{i}{2}}}$$

стремится къ предѣлу равному

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} C^{\frac{i}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^i\, dt$$

гдѣ

$$C = 2pq \frac{1+\delta}{1-\delta}.$$

Для этой цѣли намъ послужитъ намѣченное разложеніе раціональной функціи $\left\{\frac{d^i\, \Omega\,(e^u,\ te^{-pu})}{du^i}\right\}_{u=0}$

на простѣйшія дроби и указанныя разложенія послѣднихъ въ ряды по возрастающимъ степенямъ t.

Изъ формулы (14) ясно, что дробями вида

$$\frac{H}{(1-\delta t)^l}$$

намъ не надо заниматься, ибо онѣ даютъ въ выраженіи

$$\frac{\text{м. о.}\,(m-np)^i}{n^{\frac{i}{2}}},$$

при переходѣ къ предѣлу, исчезающіе члены.

Въ силу же формулъ (12) отпадаютъ и всѣ дроби вида

$$\frac{G}{(1-t)^j} \quad \text{при} \quad j \leqq \frac{i+1}{2}.$$

Остается только выяснить, что j не можетъ быть больше $\frac{i}{2}+1$ и что въ случаѣ

$$j = \frac{i}{2}+1,$$

возможномъ только при i четномъ, должно быть

$$\frac{G}{1.2.3\ldots\frac{i}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} C^{\frac{i}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^i \, dt.$$

Для этой цѣли обращаемся къ общимъ формуламъ, посредствомъ которыхъ находятся производныя дробныхъ функцій:

$$(15) \qquad \frac{d^i}{du^i}\left(\frac{U}{V}\right) = U \frac{d^i}{du^i}\left(\frac{1}{V}\right) + \frac{i}{1} U' \frac{d^{i-1}}{du^{i-1}}\left(\frac{1}{V}\right) + \ldots.$$

и

$$(16) \qquad \frac{d^\alpha}{du^\alpha}\left(\frac{1}{V}\right) = \sum \frac{\alpha!\,\beta!}{V^{\beta+1}} \frac{(-V')^\lambda}{\lambda!} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}V''\right)^\mu}{\mu!} \frac{\left(-\frac{1}{6}V'''\right)^\nu}{\nu!} \ldots,$$

гдѣ суммированіе Σ надо распространить на всѣ возможныя совокупности цѣлыхъ чиселъ

$$\beta, \lambda, \mu, \nu, \ldots,$$

удовлетворяющія двумъ уравненіямъ

$$(17) \qquad \begin{aligned} \lambda + \mu + \nu + \ldots &= \beta \\ \lambda + 2\mu + 3\nu + \ldots &= \alpha \end{aligned}$$

и неравенствамъ

$$0 < \beta \leqq \alpha, \ \lambda \geqq 0, \ \mu \geqq 0, \ \nu \geqq 0, \ldots$$

Чтобы получить

$$\left\{\frac{d^i\, \Omega(e^u, te^{-pu})}{du^i}\right\}_{u=0}$$

мы должны въ формулахъ (15) и (16) положить

$$(18)\quad \begin{aligned} U &= 1 + \{(p' - p_1)e^{qu} + (q' - q_2)e^{-pu}\}t \\ V &= 1 - \{(p + \delta q)e^{qu} + (q + \delta p)e^{-pu}\}t + \delta e^{(q-p)u}t^2 \end{aligned}$$

и по выполненіи всѣхъ дифференцированій приравнять число u нулю.

Разсматривая отдѣльные члены правой части формулы (15) при U и V, опредѣляемыхъ равенствами (18), видимъ, что произведеніе

$$U^{(i-\alpha)}\frac{d^\alpha}{du^\alpha}\left(\frac{1}{V}\right)$$

даетъ намъ при $u = 0$, такую раціональную функцію числа t, знаменатель которой можетъ содержать множитель $1 - t$ только въ той же степени, какъ и знаменатель функціи

$$\frac{d^\alpha}{du^\alpha}\left(\frac{1}{V}\right)_{u=0},$$

или въ низшей степени. Переходя къ формулѣ (16), мы прежде всего, на основаніи второго изъ равенствъ (18), находимъ

$$V' = -\{(p + \delta q)qe^{qu} - (q + \delta p)pe^{-pu}\}t + \delta(q - p)e^{(q-p)u}t^2$$

и

$$V'_{u=0} = \delta(p - q)t(1 - t),$$

чѣмъ обнаруживается дѣлимость цѣлой функціи

$$V'_{u=0}$$

на $1 - t$.

Отсюда слѣдуетъ, что знаменатель общаго члена

$$\frac{\alpha!\,\beta!}{V^{\beta+1}}\cdot\frac{(-V')^\lambda}{\lambda!}\cdot\frac{\left(-\frac{1}{2}V''\right)^\mu}{\mu!}\cdot\frac{\left(-\frac{1}{6}V'''\right)^\nu}{\nu!}\cdots$$

формулы (16), при $u = 0$, можетъ содержать, послѣ надлежащихъ сокращеній, множитель $1 - t$ въ степени не большей числа $\beta + 1 - \lambda$.

Съ другой стороны изъ условій, ограничивающихъ величины

$$\beta, \lambda, \mu, \nu, \ldots,$$

нетрудно вывесть неравенство

$$\lambda \geqq 2\beta - \alpha,$$

которое ограничиваетъ значенія λ при $2\beta > \alpha$.

Пока $2\beta < \alpha$, число $\beta + 1 - \lambda$ остается, очевидно, меньше $\frac{\alpha}{2} + 1$, ибо $\lambda \geqq 0$; то же число $\beta + 1 - \lambda$ остается меньше $\frac{\alpha}{2} + 1$ и при $2\beta > \alpha$, ибо тогда $\lambda \geqq 2\beta - \alpha$. И только при $\beta = \frac{\alpha}{2}$, если такое значеніе β возможно, и при $\lambda = 0$ важное для насъ число

$$\beta + 1 - \lambda$$

достигаетъ значенія $\frac{\alpha}{2} + 1$.

Останавливаясь на предположеніи

$$\alpha = 2\beta, \ \lambda = 0,$$

которое возможно только при α четномъ, находимъ, что этому предположенію соотвѣтствуетъ только одинъ членъ формулы (16)

$$\frac{1.2.3\ldots\alpha}{2^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{(-V'')^{\frac{\alpha}{2}}}{V^{\frac{\alpha}{2}+1}}.$$

Слѣдовательно, если i нечетное, то ни одно изъ нашихъ произведеній

$$U^{(i-\alpha)} \frac{d^\alpha}{du^\alpha}\left(\frac{1}{V}\right),$$

при $u = 0$, не можетъ содержать въ знаменателѣ множитель $1 - t$ въ степени большей $\frac{i+1}{2}$, и потому, согласно вышеприведеннымъ объясненіямъ, должно быть

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \frac{\text{м. о.}\,(m - np)^i}{n^{\frac{i}{2}}} = 0.$$

Если же i число четное, то въ разложеніи

$$\left\{\frac{d^i\,\Omega\,(e^u, te^{-pu})}{du^i}\right\}_{u=0}$$

на простѣйшія дроби, два вида которыхъ

$$\frac{G}{(1-t)^j} \quad \text{и} \quad \frac{H}{(1-\delta t)^l}$$

нами установлены, число j не превосходитъ $\frac{i}{2}+1$.

И соотвѣтствующая этому случаю дробь

$$\frac{G}{(1-t)^{\frac{i}{2}+1}}$$

прямо получается изъ подобнаго же разложенія на простѣйшія дроби произведенія

$$\frac{1.2.3\ldots.i}{2^{\frac{i}{2}}}\left(\frac{U}{V}\right)_{u=0}\left(\frac{-V''}{V}\right)_{u=0}^{\frac{i}{2}},$$

такъ что коэффиціентъ ея G опредѣляется равенствомъ

$$G=\frac{1.2.3\ldots.i}{2^{\frac{i}{2}}}\cdot\frac{U}{-\frac{dV}{dt}}\cdot\left(\frac{\frac{d^2\,V}{du^2}}{\frac{dV}{dt}}\right)^{\frac{i}{2}}.$$

при

$$u=0, \quad t=1.$$

Производя наконецъ указанныя вычисленія, находимъ

$$(U)_{u=0,\,t=1}=1-\delta, \quad \left(\frac{dV}{dt}\right)_{u=0,\,t=1}=-1+\delta$$

$$\left(\frac{d^2\,V}{du^2}\right)_{u=0,\,t=1}=-q^2(p+\delta q)-p^2(q+\delta p)+\delta\,(q-p)^2=-pq\,(1+\delta)$$

и затѣмъ

$$G=\frac{1.2.3\ldots.i}{2^{\frac{i}{2}}}\left\{pq\,\frac{1+\delta}{1-\delta}\right\}^{\frac{i}{2}},$$

чѣмъ и доказывается формула

$$\frac{G}{1.2.3\ldots.\frac{i}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{2pq\,\frac{1+\delta}{1-\delta}\right\}^{\frac{i}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,t^i\,dt,$$

которую мы желали установить, какъ указано выше; ибо

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^i\, dt = \frac{1.3.5\ldots.(i-1)}{2^{\frac{i}{2}}}.$$

Такимъ образомъ мы обнаружили, что, какъ при i нечетномъ такъ и при i четномъ, должно быть

$$\text{пред.}_{n=\infty} \frac{\text{м. о.}\,(m-np)^i}{n^{\frac{i}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{2pq\frac{1+\delta}{1-\delta}\right\}^{\frac{i}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^i\, dt;$$

иначе сказать

$$\text{пред. м. о.} \left\{\frac{m-np}{\sqrt{2npq\frac{1+\delta}{1-\delta}}}\right\}^i = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^i\, dt.$$

А отсюда, какъ мы знаемъ, немедленно вытекаетъ теорема:

При безпредѣльномъ возрастаніи числа разсматриваемыхъ испытаній n, вѣроятность неравенствъ

$$t_1 < \frac{m-np}{\sqrt{2npq\frac{1+\delta}{1-\delta}}} < t_2$$

должна приближаться къ предѣлу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2}\, dt,$$

каковы бы ни были данныя числа t_1 и $t_2 > t_1$.

Закончимъ статью и всю книгу поучительнымъ примѣромъ связанныхъ испытаній, совокупность которыхъ, съ нѣкоторымъ приближеніемъ, можно разсматривать какъ простую цѣпь. Этотъ примѣръ выясняетъ, что суммы многихъ связанныхъ величинъ могутъ образовать (почти) независимыя величины.

Примѣръ нашъ не требуетъ ничего, кромѣ какой нибудь книги, и потому легко можетъ быть повторенъ каждымъ, въ большемъ или меньшемъ размѣрѣ. Мы беремъ послѣдовательность 20000 буквъ въ романѣ Пушкина «Евгеній Онѣгинъ», не

считая ъ и ь; эта послѣдовательность обнимаетъ всю первую главу и шестнадцать строфъ второй. Она доставляетъ намъ 20000 связанныхъ испытаній, каждое изъ которыхъ даетъ гласную или согласную букву. Соотвѣтственно этому мы допускаемъ существованіе неизвѣстной постоянной вѣроятности p буквѣ быть гласной и приближенную величину числа p ищемъ изъ наблюденій, считая число появившихся гласныхъ и согласныхъ буквъ. Кромѣ числа p мы найдемъ, также изъ наблюденій, приближенныя величины двухъ другихъ чиселъ p_1 и p_2, представляющихъ вѣроятности:

первое, p_1, — гласной буквѣ слѣдовать за гласной,

второе, p_2, — гласной буквѣ слѣдовать за согласной.

Противоположныя вѣроятности, буквѣ быть согласной, обозначимъ, какъ въ только что произведенномъ изслѣдованіи:

$$q, \; q_1, \; q_2.$$

Разыскивая число p, мы находимъ для него сначала 200 приближенныхъ величинъ, изъ которыхъ затѣмъ выводимъ среднюю арифметическую. А именно, мы разбиваемъ всю послѣдовательность 20000 буквъ на 200 послѣдовательностей по 100 буквъ и считаемъ сколько гласныхъ въ каждой сотнѣ буквъ: мы получаемъ 200 чиселъ, которыя по раздѣленіи на 100, даютъ двѣсти приближенныхъ величинъ p.

При счетѣ числа гласныхъ мы имѣемъ въ виду сохранить возможность образовать другія соединенія по 100 буквъ, не пересматривая всей совокупности 20000 буквъ. Съ этой цѣлью мы располагаемъ каждую изъ разсматриваемыхъ сотенъ буквъ въ квадратъ, по десяти строкъ и десяти столбцовъ, сохраняя порядокъ буквъ

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20,
. . . .
91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100;

считаемъ, сколько гласныхъ въ каждомъ столбцѣ, въ отдѣльности, и соединяемъ числа по два:

$$1^{oe} \text{ и } 6^{oe},\quad 2^{oe} \text{ и } 7^{oe},\quad 3^{ье} \text{ и } 8^{oe},\quad 4^{oe} \text{ и } 9^{oe},\quad 5^{oe} \text{ и } 10^{oe}.$$

Мы получаемъ такимъ образомъ для каждой сотни буквъ пять чиселъ, обозначаемыхъ нами символами

$$(1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9), (5, 10);$$

сумма ихъ

$$(1, 6) + (2, 7) + (3, 8) + (4, 9) + (5, 10)$$

равна числу гласныхъ этой сотни.

Соединяя же по 500 буквъ вмѣстѣ, мы можемъ образовать новыя пять сотенъ буквъ: первую — изъ первыхъ и шестыхъ столбцовъ, вторую — изъ вторыхъ и седьмыхъ столбцовъ и т. д. Число гласныхъ въ этихъ новыхъ сотняхъ опредѣляется суммами

$$\Sigma(1,6),\ \Sigma(2,7),\ \Sigma(3,8),\ \Sigma(4,9),\ \Sigma(5,10),$$

состоящими изъ соотвѣтствующихъ пяти слагаемыхъ.

Результаты нашего счета приведены въ сорока табличкахъ, каждая изъ которыхъ содержитъ: въ первой строкѣ — пять чиселъ (1, 6) и ихъ сумму, во второй строкѣ — пять чиселъ (2, 7) и ихъ сумму и т. д., а въ послѣдней строкѣ — число гласныхъ въ первой сотнѣ, во второй сотнѣ и т. д. и наконецъ число гласныхъ во всѣхъ пяти сотняхъ, уменьшенное для сбереженія мѣста на 200.

6	8	11	11	13	**49**
12	11	7	7	5	**42**
6	6	6	7	13	**38**
8	10	11	9	4	**42**
10	11	5	10	8	**44**
42	**46**	**40**	**44**	**43**	15

16	11	9	8	7	**51**
4	8	9	11	10	**42**
9	9	9	7	10	**44**
12	9	6	10	7	**44**
3	8	10	8	9	**38**
44	**45**	**43**	**44**	**43**	19

14	12	7	3	6	**42**
5	5	11	9	11	**41**
8	10	6	10	7	**41**
11	11	8	3	10	**43**
4	4	11	14	8	**41**
42	**42**	**43**	**39**	**42**	8

5	11	10	6	10	**42**
12	8	8	11	7	**46**
7	7	12	10	9	**45**
8	12	7	9	9	**45**
12	8	10	9	8	**47**
44	**46**	**47**	**45**	**43**	25

10	6	6	6	7	**35**
9	12	15	6	9	**51**
9	3	6	10	9	**37**
9	11	8	5	6	**39**
9	10	10	10	9	**48**
46	**42**	**45**	**37**	**40**	10

8	7	8	7	10	**40**
10	9	9	8	8	**44**
8	9	8	8	8	**41**
10	6	13	6	12	**47**
8	12	5	13	6	**44**
44	**43**	**43**	**42**	**44**	16

11	11	8	7	7	**44**
9	6	10	11	11	**47**
12	9	9	5	6	**41**
10	8	6	11	11	**46**
7	6	8	9	8	**38**
49	**40**	**41**	**43**	**43**	16

11	10	10	12	6	**49**
4	4	9	7	9	**33**
11	13	6	9	10	**49**
6	7	11	8	6	**38**
8	6	10	7	12	**43**
40	**40**	**46**	**43**	**43**	12

12	9	8	10	10	49	8	9	9	5	8	39	7	7	7	7	9	37	12	7	7	6	8	40
3	10	12	9	10	44	7	9	9	11	7	43	9	13	6	8	4	40	6	8	7	10	8	39
11	11	6	11	10	49	10	6	6	9	9	40	9	7	11	12	14	53	9	10	10	8	7	44
10	8	11	6.	7	42	7	8	15	6	9	45	7	11	8	9	7	42	9	5	6	7	7	34
6	8	7	9	6	36	11	7	6	11	10	45	8	10	10	11	9	48	7	11	9	13	7	47
42	46	44	45	43	20	43	39	45	42	43	12	40	48	42	47	43	20	43	41	39	44	37	4

7	4	11	5	7	34	5	5	7	5	9	31	8	6	5	14	11	44	10	9	13	6	12	50
11	14	9	11	9	54	12	6	10	10	8	46	8	12	10	7	4	41	8	8	8	9	5	38
7	6	9	8	9	39	8	14	11	11	10	54	8	10	9	8	14	49	10	10	8	9	10	47
10	9	8	10	5	42	4	3	9	5	9	30	9	5	9	9	6	38	7	9	10	7	10	43
11	10	8	9	11	49	13	14	9	11	7	54	8	13	11	5	10	47	9	8	3	11	7	38
46	43	45	43	41	18	42	42	46	42	43	15	41	46	44	43	45	19	44	44	42	42	44	16

4	11	10	12	5	42	5	11	10	6	5	37	4	4	10	11	5	34	13	11	13	10	10	57
14	9	8	7	14	52	8	9	8	10	10	45	6	12	9	8	10	45	7	10	9	6	2	34
4	8	9	8	4	33	8	8	6	9	9	40	13	4	10	8	6	41	8	8	7	8	12	43
8	14	11	12	6	51	10	6	9	7	6	38	7	10	7	12	11	47	9	11	9	10	6	45
11	6	7	4	14	42	11	9	8	10	12	50	9	13	8	1	8	39	6	3	7	9	9	34
41	48	45	43	43	20	42	43	41	42	42	10	39	43	44	40	40	6	43	43	45	43	39	13

11	6	8	9	5	39	10	10	4	7	9	40	10	8	7	8	8	41	10	3	11	13	5	42
6	10	6	8	13	43	11	10	13	13	9	56	6	9	9	8	7	39	7	11	9	7	10	44
10	5	11	11	6	43	10	7	5	9	6	37	15	9	11	13	9	57	10	10	4	7	7	38
9	12	6	8	10	45	10	5	8	10	10	43	5	10	5	4	7	31	7	7	14	13	7	48
7	11	9	10	10	47	6	13	10	5	6	40	8	9	10	12	9	48	11	9	9	6	15	50
43	44	40	46	44	17	47	45	40	44	40	16	44	45	42	45	40	16	45	40	47	46	44	22

8	8	13	5	8	42	12	7	12	5	12	48	10	14	7	6	6	43	9	6	7	10	5	37
9	10	7	14	9	49	10	8	5	13	4	40	4	6	8	10	14	42	11	10	7	8	9	45
9	11	6	8	7	41	10	13	8	7	9	47	13	6	12	8	5	44	10	10	9	9	10	48
7	9	12	6	9	43	9	4	12	6	9	40	7	13	5	8	10	43	8	6	12	10	10	46
10	9	9	12	9	49	4	12	9	9	8	42	8	5	15	10	9	47	9	11	8	5	11	44
43	47	47	45	42	24	45	44	46	40	42	17	42	44	47	42	44	19	47	43	43	42	45	20

12	13	5	9	11	50	5	11	8	12	10	46	9	11	10	6	13	49	5	9	7	10	6	37
7	7	10	5	8	37	12	8	9	8	6	43	9	8	6	8	6	37	10	9	11	7	7	44
7	7	9	14	7	44	8	11	9	8	7	43	7	7	12	10	9	45	11	11	11	10	8	51
12	13	7	8	10	50	8	5	7	11	8	39	12	12	6	8	8	46	7	7	5	10	10	39
4	4	12	11	9	40	11	11	10	6	8	46	5	7	9	11	4	36	13	8	9	8	10	48
42	44	43	47	45	21	44	46	43	45	39	17	42	45	43	43	40	13	46	44	43	45	41	19

8	6	8	7	14	43	7	9	8	6	7	37	9	11	11	8	8	47	5	7	4	3	7	26
8	14	13	8	4	47	9	8	6	10	11	44	10	8	5	9	10	42	14	10	13	9	5	51
12	4	6	9	11	42	10	9	10	8	10	47	6	8	16	12	11	53	7	8	6	8	9	38
6	8	9	10	8	41	8	7	4	9	4	32	12	11	5	7	8	43	7	10	9	5	9	40
6	8	11	8	6	39	11	8	10	8	9	46	6	5	9	10	8	38	9	10	11	16	7	53
40	40	47	42	43	12	45	41	38	41	41	6	43	43	46	46	45	23	42	45	43	41	37	8

4	7	9	11	10	41	10	8	7	8	7	40	12	10	11	4	5	42	12	13	6	6	10	47
10	7	9	4	9	39	10	8	11	10	7	46	5	9	10	11	11	46	6	3	10	10	4	33
8	13	9	12	10	52	6	11	11	10	10	48	10	8	10	7	13	48	11	11	9	7	14	52
7	5	7	7	12	38	12	8	7	6	5	38	11	8	8	11	5	43	5	8	8	9	9	39
13	10	10	9	5	47	5	9	11	12	11	48	4	8	8	9	11	40	11	6	11	12	7	47
42	42	44	43	46	17	43	44	47	46	40	20	42	43	47	42	45	19	45	41	44	44	44	18

Остановимся на совокупности чиселъ

42, 46, 40, 44, 43, 44, 45, 43, ...,

стоящихъ въ послѣднихъ строкахъ нашихъ 40 табличекъ и показывающихъ сколько находится гласныхъ въ послѣдовательныхъ сотняхъ текста:

1) мой дядя самых честных правил когда не в шутку
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
занемог он уважат себя заставил и лучше выдумат не мог его
16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37
примѣр другим на (42 гласныхъ)
38 39 40 41 42

2) ука но боже мой какая скука с болным сидѣт и ден и ноч
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
не отходя ни шагу проч какое низкое коварство полуживаго
21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42
забавлят ем (46 гласныхъ)
43 44 45 46

и т. д.

Считая сколько разъ въ этой совокупности 200 чиселъ встрѣчается каждое число составляемъ новую небольшую таблицу

37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
3	1	6	18	12	31	43	29	25	17	12	2	1

Здѣсь въ первой строкѣ приведены всѣ числа, входящія въ нашу совокупность, а подъ ними, во второй строкѣ, указано, сколько разъ они встрѣчаются.

При помощи этой таблицы легко находимъ ихъ среднее арифметическое

$$43+\frac{29+25.2+17.3+12.4+2.5+6-31-12.2-18.3-6.4-5-3.6}{200}=43{,}19$$

и отсюда выводимъ

$$p \approx 0{,}4319 \approx 0{,}432.$$

Вычисляемъ сумму квадратовъ ихъ отклоненій отъ 43,2; она оказывается равною

$$1022{,}8,$$

что по раздѣленіи на 200 даетъ намъ число

$$5{,}114,$$

которое можно принять за приближенную величину математическаго ожиданія квадрата отклоненія любого изъ нашихъ 200 чиселъ отъ ихъ общаго математическаго ожиданія, приблизительно равнаго 43,2. Наконецъ число

$$\frac{5{,}114}{200} = 0{,}02557$$

представляетъ приближенную величину математическаго ожиданія квадрата погрѣшности въ опредѣленіи $100p$ равенствомъ

$$100p \doteq 43{,}2.$$

Такое заключеніе соединено съ обычнымъ предположеніемъ способа наименьшихъ квадратовъ, что мы имѣемъ дѣло съ независимыми величинами. Это предположеніе, въ данномъ случаѣ, оправдывается не хуже, чѣмъ во многихъ другихъ, ибо связь между числами, по способу ихъ полученія, весьма слаба. Независимости нашихъ величинъ соотвѣтствуетъ тотъ фактъ, что, соединяя ихъ по двѣ, по четыре и по пяти и вычисляя для этихъ 100, 50 и 40 комбинацій суммы квадратовъ ихъ отклоненій отъ

$$86{,}4, \quad 172{,}8 \quad \text{и} \quad 216,$$

мы получаемъ числа

$$827{,}6 \quad 975{,}2 \quad \text{и} \quad 1004,$$

которыя не очень сильно отличаются отъ ранѣе найденнаго числа

$$1022{,}8.$$

Можно подмѣтить также нѣкоторую согласованность нашихъ результатовъ съ извѣстнымъ закономъ погрѣшностей, указан-

нымъ въ концѣ § 39 и связаннымъ съ именами Гаусса и Лапласа; напримѣръ, величина называемая вѣроятною погрѣшностью, у насъ приблизительно равна

$$0,67\sqrt{5,11} \doteq 1,5$$

и соотвѣтственно этому между

$$43,2 - 1,5 = 41,7 \text{ и } 43,2 + 1,5 = 44,7$$

находится 103 числа, т. е. около половины ихъ: 31 разъ число 42, 43 раза число 43 и 29 разъ число 44.

Переходя отъ сотенъ испытаній къ отдѣльнымъ испытаніямъ, замѣчаемъ, что число

$$\frac{5,114}{100} = 0,05114$$

сильно отличается отъ

$$0,432 \times 0,568 = 0,245376:$$

коэффиціентъ дисперсіи, который въ случаѣ § 40 былъ весьма близокъ къ единицѣ, здѣсь оказывается равнымъ

$$\frac{51140}{245376} \doteq 0,208,$$

т. е. составляетъ около $\frac{1}{5}$, что прекрасно объясняется связанностью нашихъ испытаній. Для выясненія этой связи, хотя бы и неполнаго, намъ можетъ послужить вычисленіе вышеупомянутыхъ вѣроятностей p_1 и p_2.

Просматривая весь текстъ изъ 20000 буквъ, мы считаемъ, сколько въ немъ встрѣчается послѣдовательностей

гласная, гласная;

получаемъ число 1104, которое по раздѣленіи на число всѣхъ гласныхъ въ текстѣ даетъ для p_1 приближенную величину

$$\frac{1104}{8638} \doteq 0,128$$

Подобнымъ же образомъ считая число послѣдовательностей

согласная, согласная

и дѣля его на 11362 мы могли бы найти приближенное значеніе q_2 и затѣмъ $p_2 = 1 - q_2$. Но можно замѣнить утомительный прямой счетъ слѣдующимъ, очень краткимъ. А именно, нетрудно замѣтить, что разность

$$8638 - 1104 = 7534$$

равна числу послѣдовательностей

согласная, гласная,

или превосходитъ его на единицу; отсюда тотчасъ получаемъ для p_2 такую приближенную величину

$$\frac{7534}{11362} \dotplus 0{,}663.$$

Мы видимъ, что вѣроятность буквѣ быть гласной значительно измѣняется, въ зависимости отъ того, предшествуетъ ей гласная или согласная; разность $p_1 - p_2$, обозначаемая нами буквою δ, оказывается приблизительно равною

$$0{,}128 - 0{,}663 = -0{,}535.$$

Если допустить теперь, что наша послѣдовательность 20000 буквъ образуетъ простую цѣпь, въ вышеобъясненномъ смыслѣ, то при

$$\delta = -0{,}535$$

за теоретическій коэффиціентъ дисперсіи можно принять, согласно нашему изслѣдованію, число

$$\frac{1+\delta}{1-\delta} = \frac{465}{1535} \dotplus 0{,}3;$$

конечно, это число не вполнѣ совпадаетъ съ полученнымъ раньше

0,208,

но, во всякомъ случаѣ, подходитъ къ нему ближе чѣмъ число единица, соотвѣтствующее случаю независимыхъ испытаній.

Можно было бы еще ближе подойти къ числу 0,208 при помощи выводовъ моего изслѣдованія*) «Объ одномъ случаѣ испытаній связанныхъ въ сложную цѣпь»; тогда пришлось бы считать различныя послѣдовательности изъ трехъ буквъ, при чемъ прямой счетъ необходимо было бы выполнить для двухъ послѣдовательностей:

гласная, гласная, гласная

и

согласная, согласная, согласная.

Слѣдуетъ однако помнить, что полнаго совпаденія чиселъ въ подобныхъ изслѣдованіяхъ, гдѣ теорія соединена съ опытомъ, нельзя требовать.

Переходимъ къ другому указанному нами распредѣленію 20000 буквъ на сотни. Составляемъ для него таблицу повторяемости различныхъ чиселъ, подобную прежней.

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
1	0	0	0	1	2	1	3	5	1	2	9	13	12	13	11
42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
17	16	15	10	10	16	10	10	5	5	3	3	3	0	1	2

Среднее арифметическое изъ этихъ новыхъ 200 чиселъ равно прежнему числу

43,19.

Сумма же квадратовъ ихъ отклоненій отъ 43,2 значительно больше прежней; а именно она равна

5788,8.

---

*) Изв. Академіи Наукъ. 1911.

Здѣсь слѣдуетъ остановиться на условіи независимости величинъ, обычно соединяемомъ со способомъ наименьшихъ квадратовъ (см. главу VII); вспомнимъ, для чего нужно это условіе. Оно является необходимымъ при разысканіи вѣса окончательнаго результата, выражаемаго равенствомъ (21), и при вычисленіи математическаго ожиданія W, которое даетъ намъ приближенную величину k. Но это условіе окажется лишнимъ, если мы, во первыхъ, оставимъ въ сторонѣ вопросъ о вѣсѣ равенства (21) и во вторыхъ замѣнимъ ξ въ выраженіи W числомъ a, которое потомъ будемъ считать равнымъ a_0, пренебрегая разностью $a - a_0$. Тогда въ основу нашихъ сужденій лягутъ два равенства

$$\text{м. о.}\,\frac{p'x' + p''x'' + \ldots + p^{(n)}x^{(n)}}{p' + p'' + \ldots + p^{(n)}} = a$$

и

$$\text{м. о.}\,\frac{p'(x'-a)^2 + p''(x''-a)^2 + \ldots + p^{(n)}(x^{(n)}-a)^2}{n} = k$$

не требующія независимости величинъ

$$x',\ x'', \ldots,\ x^{(n)}.$$

На основаніи такихъ равенствъ, опираясь на законъ большихъ чиселъ мы полагаемъ

$$a \doteq \frac{\Sigma p^{(i)} a^{(i)}}{\Sigma p^{(i)}} = a_0 \text{ и } k \doteq \frac{\Sigma p^{(i)}(a^{(i)} - a)^2}{n} \doteq \frac{\Sigma p^{(i)}(a^{(i)} - a_0)^2}{n}.$$

Отпадаетъ только теорема о вѣсѣ окончательнаго результата, выражаемая извѣстнымъ равенствомъ (22): вѣсъ результата равенъ суммѣ вѣсовъ составляющихъ.

Въ данномъ случаѣ, каждое изъ нашихъ 200 чиселъ представляетъ сумму почти независимыхъ величинъ; но зато сами суммы связаны по пяти.

Мы имѣемъ 40 группъ по 500 буквъ; въ каждой сотнѣ нѣтъ смежныхъ буквъ текста, чѣмъ обусловливается независимость слагаемыхъ; зато въ каждой группѣ смежны буквы первой сотни съ буквами второй сотни, буквы второй сотни съ бук-

вами первой и третьей и т. д., въ силу чего наши числа связаны по пяти, какъ сказано выше.

Вмѣсто 200 независимыхъ чиселъ у насъ оказывается теперь 5 связанныхъ группъ, каждая изъ которыхъ содержитъ 40 независимыхъ чиселъ.

Эго не мѣшаетъ намъ, согласно приведеннымъ объясненіямъ, разсматривать число

$$\frac{5788,8}{200} = 28,944$$

какъ приближенную величину математическаго ожиданія квадрата отклоненія нашихъ новыхъ 200 чиселъ

49, 42, 38, 42, 44, 51, 42, 44,. . . .

отъ ихъ математическаго ожиданія, приблизительно равнаго 43,2. И переходя отъ сотенъ буквъ (испытаній) къ отдѣльнымъ буквамъ, мы замѣчаемъ, что число

0,28944

не очень сильно отличается отъ

$$0,432 \times 0,568 = 0,245376:$$

коэффиціентъ дисперсіи оказывается равнымъ

$$\frac{289440}{245376} \neq 1,18.$$

Если же мы обратимся къ окончательному результату

43,19,

то математическое ожиданіе квадрата его погрѣшности нельзя уже выражать числомъ

$$\frac{28,944}{200} = 0,14472,$$

въ виду связи нашихъ чиселъ

49, 42, 38, 42, 44,. . . .;

напротивъ мы имѣемъ основаніе приравнивать это математическое ожиданіе числу

$$\frac{5{,}114}{200} = 0{,}02557,$$

найденному при прежнемъ распредѣленіи буквъ на сотни.

Упомянутая сейчасъ связь чиселъ проявляется при соединеніи ихъ въ суммы по два, по четыре и, въ особенности, по пяти. Вычисляя для этихъ 100, 50, и 40 комбинацій суммы квадратовъ ихъ отклоненій отъ

86,4, 172,8 и 216,

мы получаемъ вмѣсто числа

5788,8

такія

3551,6 3089,2 и 1004,

послѣднее изъ которыхъ почти въ шесть разъ меньше 5788,8.

Во время печатанія этой книги я выполнилъ изслѣдованіе, подобное предыдущему, надъ произведеніемъ другого автора (С. Т. Аксаковъ, Дѣтскіе годы Багрова-внука). Результаты послѣдняго изслѣдованія, обнимающаго совокупность 100000 буквъ*), приведены въ слѣдующихъ табличкахъ, изъ которыхъ можно видѣть, какъ и въ какой мѣрѣ проявляются въ дѣйствительности предѣльныя теоремы исчисленія вѣроятностей.

Распредѣленіе тысячъ буквъ (сотенъ десятковъ) по числу десятковъ, содержащихъ одинаковое число гласныхъ.

Число гласныхъ въ десяткѣ указано въ первомъ столбцѣ, а число десятковъ въ первой строкѣ. Таблицы даютъ соотвѣт-

---

*) Изслѣдованіе произведено надъ переписаннымъ мною текстомъ, который нѣсколько отличается отъ оригинала, благодаря вкравшимся при перепискѣ ошибкамъ; но, въ виду немногочисленности и неумышленности ошибокъ, онѣ не должны существенно влiять на выводы. Въ первомъ изслѣдованіи я употребилъ много времени и труда на исключеніе такихъ ошибокъ. Вычисленія выполнены въ обоихъ случаяхъ съ одинаковою тщательностью.

ствующія числа сотенъ десятковъ. Отсюда выведены вѣроятности, что число гласныхъ въ десяткѣ равно 2, 3, 4, 5, 6, 7 (другія числа не встрѣчались). Эти вѣроятности приведены въ предпослѣднемъ столбцѣ, въ послѣднемъ же столбцѣ даны для нихъ коэффиціенты дисперсіи.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Вѣр.	К. д.
2	84	15	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0017	—
3	0	0	1	5	6	7	9	11	10	15	12	12	5	3	1	1	1	1	0	0,0835	1,19
6	0	0	0	3	6	8	5	20	12	18	10	9	2	2	3	0	0	1	1	0,0827	1,04
7	73	20	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0034	—

	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	Вѣр.	к. д.
4	0	2	3	3	2	6	6	10	8	2	5	7	7	4	9	5	8	3	5	3	1	0	0	1	0,4276	1,02
5	2	5	6	5	3	10	8	6	8	7	11	7	6	6	0	6	1	1	0	0	2	0	0	0	0,4011	0,82

Коэффиціентовъ дисперсіи для 2 и 7 я не привожу (вычислить ихъ не трудно), такъ какъ для столь рѣдкихъ событій они ни о чемъ не свидѣтельствуютъ.

Распредѣленіе десятковъ по числу гласныхъ въ нихъ.

2	3	4	5	6	7	Вѣр. глас.	К. д.
17	835	4276	4011	827	34	0,44898	0,25

Это распредѣленіе вытекаетъ изъ предыдущихъ табличекъ и даетъ намъ среднюю вѣроятность гласной, или число гласныхъ въ 100000 буквъ и соотвѣтствующій коэффиціентъ дисперсіи.

Послѣдовательностей, состоящихъ изъ двухъ гласныхъ, ока-

залось, по моему счету, 6588; поэтому

$$p_1 = \frac{6588}{44898} = 0{,}147,\quad p_2 = \frac{38310}{55102} = 0{,}695,\quad \delta = -0{,}548,\quad \frac{1+\delta}{1-\delta} = 0{,}29.$$

Измѣненное и теоретическое (внизу) распредѣленіе десятковъ по числу гласныхъ.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Вѣр. глас.	К. д.
26	233	793	1699	2320	2319	1548	740	261	59	2	0,44898	1,05
26	210	771	1675	2389	2335	1586	738	226	41	3		

Измѣненіе порядка буквъ произведено по тому же способу, какъ и въ первомъ изслѣдованіи (безъ образованія новыхъ сотенъ): въ новые десятки соединены буквы, отдѣляемыя въ текстѣ, другъ отъ друга, девятью промежуточными буквами.

Теоретическое распредѣленіе десятковъ получено по формулѣ (4), относящейся къ независимымъ испытаніямъ, при

$$p = 0{,}44898,\quad q = 0{,}55102,\quad n = 10,$$

съ присоединеніемъ, конечно, множителя 10000.

Распредѣленіе тысячъ буквъ по числу гласныхъ.

Въ первой строкѣ указаны отклоненія (сначала отрицательныя, а потомъ положительныя) числа гласныхъ отъ 449, а во второй соотвѣтствующее число тысячъ буквъ

−19	17	16	15	13	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	+1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	16	18	К. д.
1	1	1	1	1	2	1	3	3	5	5	4	5	4	7	3	7	7	4	6	3	5	0	2	2	3	5	3	1	3	1	1	0,225

Распредѣленіе сотенъ буквъ по числу гласныхъ.

37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
1	2	5	21	33	69	123	163	196	171	109	50	35	10	10	2

Среднія величины $c^{(2)}$, $c^{(3)}$, $c^{(4)}$, $c^{(5)}$, $c^{(6)}$ *степеней отклоненій отъ средняго числа гласныхъ въ сотнѣ буквъ; коэффиціентъ дисперсіи и другія отношенія.*

$c^{(2)}=c$	$c^{(3)}$	$c^{(4)}$	$c^{(5)}$	$c^{(6)}$	К. д.	$c^{(4)}:c^2$	$c^{(6)}:c^3$
4,986	0,230	83,39	11,29	2291	0,202	3,35	18,4

Эта табличка получена по числамъ предыдущей, при чемъ сначала взяты были отклоненія отъ 45, а затѣмъ произведена соотвѣтствующая поправка.

Распредѣленіе сотенъ буквъ по числу гласныхъ, при счетѣ черезъ одну букву

При этомъ счетѣ буквы, стоящія въ текстѣ рядомъ, попадаютъ въ различныя сотни, а буквы, отдѣленныя въ текстѣ одною буквою, становятся рядомъ.

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
1	0	2	1	2	6	6	8	8	19	22	25	45	42	65	47	48	61	71	67

46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
62	61	59	38	53	38	42	28	24	18	5	7	3	8	1	3	1	1	1	0	1

Среднія величины $c^{(2)}$, $c^{(3)}$ *и* $c^{(4)}$, *коэффиціентъ дисперсіи и отношеніе* $c^{(4)}:c^2$ *для послѣдняго счета.*

$c^{(2)}=c$	$c^{(3)}$	$c^{(4)}$	К. д.	$c^{(4)}:c^2$
35,896	17,47	3833,5	1,45	2,97

Коэффиціентъ дисперсіи оказался здѣсь замѣтно больше единицы. Этотъ фактъ, хотя и нерѣзко выраженный, соотвѣтствуетъ

теоретическимъ соображеніямъ о простой цѣпи, ради которыхъ и былъ предпринятъ послѣдній счетъ.

Вѣроятности p_1 и p_2 для этого новаго распредѣленія буквъ я вычислилъ сперва только по первому десятку тысячъ буквъ. Гласныхъ среди нихъ было 4462; послѣдовательностей же двухъ гласныхъ, раздѣляемыхъ въ текстѣ одною буквою, оказалось 2470. Поэтому, при счетѣ черезъ одну букву, имѣемъ

$$p_1 \approx \frac{2470}{4462} \approx 0{,}55,\quad p_2 \approx \frac{1992}{5538} \approx 0{,}36,\quad \delta \approx 0{,}19,\quad \frac{1+\delta}{1-\delta} \approx 1{,}5.$$

Затѣмъ я подсчиталъ такія послѣдовательности и для всего текста: ихъ оказалось 24773; откуда находимъ

$$p_1 \approx \frac{24773}{44898} \approx 0{,}552, p_2 \approx \frac{20125}{55102} \approx 0{,}365, \delta \approx 0{,}187, \frac{1+\delta}{1-\delta} \approx 1{,}46.$$

Литература.

А. Марковъ. Распространеніе предѣльныхъ теоремъ исчисленія вѣроятностей на сумму величинъ связанныхъ въ цѣпь. (Зап. Акад. Наукъ, VIII серія, т. XXII).

А. Марковъ. Изслѣдованіе общаго случая испытаній связанныхъ въ цѣпь. (Зап. Акад. Наукъ, VIII серія, т. XXV).

А. Марковъ. Объ испытаніяхъ связанныхъ въ цѣпь не наблюдаемыми событіями. (Изв. Акад. Наукъ. 1912).

А. Марковъ. Примѣръ статистическаго изслѣдованія, надъ текстомъ романа Пушкина «Евгеній Онѣгинъ», иллюстрирующій связь испытаній въ цѣпь. (Изв. Акад. Наукъ. 1913).

Таблица значеній

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0,00	0,00	0000	1128	2257	3385	4513	5642	6770	7899	9027	0155	0,01
0,01	0,01	1283	2412	3540	4668	5796	6924	8053	9181	0309	1437	0,02
0,02	0,02	2565	3692	4820	5948	7076	8204	9331	0459	1586	2714	0,03
0,03	0,03	3841	4969	6096	7223	8350	9477	0604	1731	2858	3984	0,04
0,04	0,04	5111	6238	7364	8490	9617	0743	1869	2995	4121	5246	0,05
0,05	0,05	6372	7497	8623	9748	0873	1998	3123	4248	5373	6497	0,06
0,06	0,06	7622	8746	9870	0994	2118	3241	4365	5488	6612	7735	0,07
0,07	0,07	8858	9981	1103	2226	3348	4470	5592	6714	7835	8957	0,08
0,08	0,09	0078	1199	2320	3441	4561	5682	6802	7922	9042	0161	0,10
0,09	0,10	1281	2400	3519	4638	5756	6874	7993	9110	0228	1346	0,11
0,10	0,11	2463	3580	4697	5813	6930	8046	9162	0277	1393	2508	0,12
0,11	0,12	3623	4738	5852	6966	8080	9194	0307	1420	2533	3646	0,13
0,12	0,13	4758	5870	6982	8094	9205	0316	1427	2537	3648	4758	0,14
0,13	0,14	5867	6976	8085	9194	0303	1411	2519	3626	4733	5840	0,15
0,14	0,15	6947	8053	9159	0265	1370	2476	3580	4685	5789	6893	0,16
0,15	0,16	7996	9099	0202	1304	2406	3508	4610	5711	6811	7912	0,17
0,16	0,17	9012	0111	1211	2310	3408	4507	5605	6702	7799	8896	0,18
0,17	0,18	9992	1089	2184	3279	4374	5469	6563	7657	8750	9843	0,19
0,18	0,20	0936	2028	3120	4211	5302	6393	7483	8573	9662	0751	0,21
0,19	0,21	1840	2928	4016	5103	6190	7277	8363	9448	0533	1618	0,22
0,20	0,22	2703	3787	4870	5953	7036	8118	9200	0281	1362	2442	0,23
0,21	0,23	3522	4601	5680	6759	7837	8915	9992	1069	2145	3221	0,24
0,22	0,24	4296	5371	6445	7519	8592	9665	0738	1810	2881	3952	0,25
0,23	0,25	5023	6093	7162	8231	9300	0368	1435	2502	3569	4635	0,26
0,24	0,26	5700	6765	7829	8893	9957	1020	2082	3144	4205	5266	0,27
0,25	0,27	6326	7386	8445	9504	0562	1620	2677	3733	4789	5845	0,28
0,26	0,28	6900	7954	9008	0061	1114	2166	3218	4269	5319	6369	0,29
0,27	0,29	7418	8467	9515	0563	1610	2656	3702	4748	5792	6836	0,30
0,28	0,30	7880	8923	9965	1007	2049	3089	4129	5169	6208	7246	0,31
0,29	0,31	8283	9321	0357	1393	2428	3463	4497	5530	6563	7595	0,32

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0,30	0,32	8627	9658	0688	1718	2747	3775	4803	5830	6857	7883	0,33
0,31	0,33	8908	9933	0957	1980	3003	4025	5047	6067	7088	8107	0,34
0,32	0,34	9126	0144	1162	2179	3195	4211	5226	6240	7253	8266	0,35
0,33	0,35	9279	0290	1301	2312	3321	4330	5338	6346	7353	8359	0,36
0,34	0,36	9365	0369	1374	2377	3380	4382	5383	6384	7384	8383	0,37
0,35	0,37	9382	0380	1377	2374	3370	4365	5359	6353	7346	8338	0,38
0,36	0,38	9330	0321	1311	2300	3289	4277	5264	6251	7237	8222	0,39
0,37	0,39	9206	0190	1173	2155	3136	4117	5097	6076	7055	8032	0,40
0,38	0,40	9009	9986	0961	1936	2910	3883	4856	5828	6799	7769	0,41
0,39	0,41	8739	9707	0676	1643	2609	3575	4540	5504	6468	7430	0,42
0,40	0,42	8392	9354	0314	1274	2232	3190	4148	5104	6060	7015	0,43
0,41	0,43	7969	8922	9875	0827	1778	2728	3678	4626	5574	6521	0,44
0,42	0,44	7468	8413	9358	0302	1245	2187	3129	4069	5009	5948	0,45
0,43	0,45	6887	7824	8761	9697	0632	1566	2500	3432	4364	5295	0,46
0,44	0,46	6225	7154	8083	9011	9938	0864	1789	2713	3637	4560	0,47
0,45	0,47	5482	6403	7323	8243	9161	0079	0996	1912	2827	3742	0,48
0,46	0,48	4655	5568	6480	7391	8301	9211	0119	1027	1934	2840	0,49
0,47	0,49	3745	4649	5553	6455	7357	8258	9158	0057	0956	1853	0,50
0,48	0,50	2750	3645	4540	5434	6327	7220	8111	9002	9891	0780	0,51
0,49	0,51	1668	2555	3442	4327	5211	6095	6978	7860	8741	9621	0,51
0,50	0,52	0500	1378	2256	3132	4008	4883	5757	6630	7502	8373	0,52
0,51	0,52	9244	0113	0982	1849	2716	3582	4447	5311	6175	7037	0,53
0,52	0,53	7899	8759	9619	0478	1336	2193	3049	3904	4758	5612	0,54
0,53	0,54	6464	7316	8166	9016	9865	0713	1560	2406	3251	4096	0,55
0,54	0,55	4939	5782	6623	7464	8304	9143	9981	0818	1654	2489	0,56
0,55	0,56	3323	4157	4989	5821	6651	7481	8310	9138	9965	0791	0,57
0,56	0,57	1616	2440	3263	4086	4907	5727	6547	7366	8183	9000	0,57
0,57	0,57	9816	0631	1445	2258	3070	3881	4691	5501	6309	7116	0,58
0,58	0,58	7923	8728	9533	0337	1140	1941	2742	3542	4341	5139	0,59
0,59	0,59	5936	6733	7528	8322	9116	9908	0700	1490	2280	3068	0,60
0,60	0,60	3856	4643	5429	6214	6998	7780	8563	9344	0124	0903	0,61
0,61	0,61	1681	2459	3235	4010	4785	5558	6331	7102	7873	8643	0,61
0,62	0,61	9411	0179	0946	1712	2477	3241	4004	4766	5527	6287	0,62
0,63	0,62	7046	7805	8562	9318	0074	0828	1582	2334	3086	3836	0,63
0,64	0,63	4586	5334	6082	6829	7575	8320	9063	9806	0548	1289	0,64
0,65	0,64	2029	2768	3506	4244	4980	5715	6449	7183	7915	8646	0,64
0,66	0,64	9377	0106	0835	1562	2289	3014	3739	4463	5185	5907	0,65
0,67	0,65	6628	7347	8066	8784	9501	0217	0932	1646	2359	3071	0,66
0,68	0,66	3782	4492	5202	5910	6617	7323	8029	8733	9436	0139	0,67
0,69	0,67	0840	1541	2240	2939	3636	4333	5028	5723	6417	7109	0,67

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0,70	0,67	7801	8492	9182	9871	0559	1245	1931	2616	3300	3983	0,68
0,71	0,68	4666	5347	6027	6706	7384	8061	8738	9413	0087	0761	0,69
0,72	0,69	1433	2105	2775	3445	4113	4781	5447	6113	6778	7441	0,69
0,73	0,69	8104	8766	9427	0086	0745	1403	2060	2716	3371	4025	0,70
0,74	0,70	4678	5330	5981	6631	7281	7929	8576	9222	9868	0512	0,71
0,75	0,71	1156	1798	2440	3080	3720	4358	4996	5633	6268	6903	0,71
0,76	0,71	7537	8170	8801	9432	0062	0691	1319	1946	2572	3197	0,72
0,77	0,72	3822	4445	5067	5688	6309	6928	7546	8164	8780	9396	0,72
0,78	0,73	0010	0624	1237	1848	2459	3069	3678	4286	4892	5498	0,73
0,79	0,73	6103	6707	7311	7913	8514	9114	9713	0312	0909	1506	0,74
0,80	0,74	2101	2695	3289	3882	4473	5064	5654	6243	6830	7417	0,74
0,81	0,74	8003	8588	9172	9755	0338	0919	1499	2078	2657	3234	0,75
0,82	0,75	3811	4386	4961	5535	6107	6679	7250	7820	8389	8957	0,75
0,83	0,75	9524	0090	0655	1219	1783	2345	2906	3467	4026	4585	0,76
0,84	0,76	5143	5699	6255	6810	7364	7917	8469	9020	9570	0120	0,77
0,85	0,77	0668	1215	1762	2307	2852	3396	3939	4480	5021	5561	0,77
0,86	0,77	6100	6638	7176	7712	8247	8782	9315	9848	0379	0910	0,78
0,87	0,78	1440	1969	2497	3024	3550	4075	4599	5123	5645	6167	0,78
0,88	0,78	6687	7207	7726	8244	8761	9277	9792	0306	0819	1332	0,79
0,89	0,79	1843	2354	2863	3372	3880	4387	4893	5398	5902	6406	0,79
0,90	0,79	6908	7410	7910	8410	8909	9407	9904	0400	0895	1389	0,80
0,91	0,80	1883	2375	2867	3358	3848	4336	4824	5312	5798	6283	0,80
0,92	0,80	6768	7251	7734	8216	8697	9177	9656	0134	0611	1088	0,81
0,93	0,81	1564	2038	2512	2985	3457	3928	4399	4868	5337	5804	0,81
0,94	0,81	6271	6737	7202	7666	8129	8592	9053	9514	9974	0433	0,82
0,95	0,82	0891	1348	1804	2260	2714	3168	3621	4073	4524	4974	0,82
0,96	0,82	5424	5872	6320	6767	7213	7658	8102	8545	8988	9429	0,82
0,97	0,82	9870	0310	0749	1188	1625	2062	2497	2932	3366	3799	0,83
0,98	0,83	4232	4663	5094	5523	5952	6380	6808	7234	7659	8084	0,83
0,99	0,83	8508	8931	9353	9775	0195	0615	1034	1452	1869	2285	0,84
1,00	0,84	2701	3115	3529	3942	4355	4766	5177	5586	5995	6403	0,84
1,01	0,84	6810	7217	7623	8027	8431	8834	9237	9638	0039	0439	0,85
1,02	0,85	0838	1236	1634	2030	2426	2821	3215	3609	4001	4393	0,85
1,03	0,85	4784	5174	5564	5952	6340	6727	7113	7499	7883	8267	0,85
1,04	0,85	8650	9032	9414	9794	0174	0553	0931	1309	1685	2061	0,86
1,05	0,86	2436	2810	3184	3557	3928	4300	4670	5040	5408	5776	0,86
1,06	0,86	6144	6510	6876	7241	7605	7968	8331	8692	9054	9414	0,86
1,07	0,86	9773	0132	0490	0847	1204	1559	1914	2268	2622	2974	0,87
1,08	0,87	3326	3677	4028	4377	4726	5074	5421	5768	6114	6459	0,87
1,09	0,87	6803	7147	7489	7832	8173	8513	8853	9192	9531	9868	0,87

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1,10	0,88	0205	0541	0877	1211	1545	1878	2211	2542	2873	3204	0,88
1,11	0,88	3533	3862	4190	4517	4844	5170	5495	5819	6143	6466	0,88
1,12	0,88	6788	7109	7430	7750	8070	8388	8706	9023	9340	9656	0,88
1,13	0,88	9971	0285	0599	0912	1224	1535	1846	2156	2466	2774	0,89
1,14	0,89	3082	3390	3696	4002	4307	4612	4916	5219	5521	5823	0,89
1,15	0,89	6124	6424	6724	7023	7321	7619	7915	8212	8507	8802	0,89
1,16	0,89	9096	9390	9682	9975	0266	0557	0847	1136	1425	1713	0,90
1,17	0,90	2000	2287	2573	2859	3143	3427	3711	3993	4275	4557	0,90
1,18	0,90	4837	5117	5397	5676	5954	6231	6508	6784	7059	7334	0,90
1,19	0,90	7608	7882	8155	8427	8698	8969	9239	9509	9778	0046	0,91
1,20	0,91	0314	0581	0847	1113	1378	1643	1907	2170	2432	2694	0,91
1,21	0,91	2956	3216	3476	3736	3994	4253	4510	4767	5023	5279	0,91
1,22	0,91	5534	5788	6042	6295	6548	6800	7051	7302	7552	7801	0,91
1,23	0,91	8050	8298	8546	8793	9039	9285	9530	9775	0019	0262	0,92
1,24	0,92	0505	0747	0989	1230	1470	1710	1949	2188	2426	2663	0,92
1,25	0,92	2900	3136	3372	3607	3841	4075	4309	4541	4773	5005	0,92
1,26	0,92	5236	5466	5696	5925	6154	6382	6609	6836	7063	7288	0,92
1,27	0,92	7514	7738	7962	8186	8409	8631	8853	9074	9295	9515	0,92
1,28	0,92	9734	9953	0172	0389	0607	0823	1040	1255	1470	1685	0,93
1,29	0,93	1899	2112	2325	2537	2749	2960	3171	3381	3590	3799	0,93
1,30	0,93	4008	4216	4423	4630	4836	5042	5247	5452	5656	5860	0,93
1,31	0,93	6063	6266	6468	6669	6870	7071	7271	7470	7669	7867	0,93
1,32	0,93	8065	8262	8459	8656	8851	9047	9241	9435	9629	9822	0,93
1,33	0,94	0015	0207	0399	0590	0781	0971	1160	1349	1538	1726	0,94
1,34	0,94	1914	2101	2287	2473	2659	2844	3029	3213	3396	3580	0,94
1,35	0,94	3762	3944	4126	4307	4488	4668	4848	5027	5205	5384	0,94
1,36	0,94	5561	5739	5915	6092	6268	6443	6618	6792	6966	7139	0,94
1,37	0,94	7312	7485	7657	7828	7999	8170	8340	8510	8679	8848	0,94
1,38	0,94	9016	9184	9351	9518	9684	9850	0016	0181	0346	0510	0,95
1,39	0,95	0673	0837	0999	1162	1323	1485	1646	1806	1966	2126	0,95
1,40	0,95	2285	2444	2602	2760	2917	3074	3231	3387	3542	3698	0,95
1,41	0,95	3852	4007	4161	4314	4467	4620	4772	4924	5075	5226	0,95
1,42	0,95	5376	5526	5676	5825	5974	6122	6270	6417	6564	6711	0,95
1,43	0,95	6857	7003	7148	7293	7438	7582	7726	7869	8012	8154	0,95
1,44	0,95	8297	8438	8580	8720	8861	9001	9140	9280	9419	9557	0,95
1,45	0,95	9695	9833	9970	0107	0243	0379	0515	0650	0785	0919	0,96
1,46	0,96	1054	1187	1320	1453	1586	1718	1850	1981	2112	2243	0,96
1,47	0,96	2373	2503	2632	2761	2890	3018	3146	3274	3401	3528	0,96
1,48	0,96	3654	3780	3906	4031	4156	4281	4405	4529	4652	4775	0,96
1,49	0,96	4898	5020	5142	5264	5385	5506	5627	5747	5867	5986	0,96

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1,50	0,96	6105	6224	6342	6460	6578	6695	6812	6929	7045	7161	0,96
1,51	0,96	7277	7392	7507	7621	7736	7849	7963	8076	8189	8301	0,96
1,52	0,96	8413	8525	8637	8748	8859	8969	9079	9189	9298	9407	0,96
1,53	0,96	9516	9625	9733	9841	9948	0055	0162	0268	0374	0480	0,97
1,54	0,97	0586	0691	0796	0900	1004	1108	1212	1315	1418	1520	0,97
1,55	0,97	1623	1725	1826	1928	2029	2129	2230	2330	2430	2529	0,97
1,56	0,97	2628	2727	2825	2924	3022	3119	3216	3313	3410	3507	0,97
1,57	0,97	3603	3698	3794	3889	3984	4079	4173	4267	4361	4454	0,97
1,58	0,97	4547	4640	4732	4825	4916	5008	5099	5191	5281	5372	0,97
1,59	0,97	5462	5552	5642	5731	5820	5909	5997	6085	6173	6261	0,97
1,60	0,97	6348	6435	6522	6609	6695	6781	6867	6952	7037	7122	0,97
1,61	0,97	7207	7291	7375	7459	7543	7626	7709	7792	7874	7956	0,97
1,62	0,97	8038	8120	8201	8282	8363	8444	8524	8604	8684	8764	0,97
1,63	0,97	8843	8922	9001	9079	9157	9235	9313	9391	9468	9545	0,97
1,64	0,97	9622	9698	9775	9851	9926	0002	0077	0152	0227	0301	0,98
1,65	0,98	0376	0450	0523	0597	0670	0743	0816	0889	0961	1033	0,98
1,66	0,98	1105	1177	1248	1319	1390	1461	1531	1601	1671	1741	0,98
1,67	0,98	1810	1880	1949	2018	2086	2154	2223	2290	2358	2426	0,98
1,68	0,98	2493	2560	2627	2693	2759	2825	2891	2957	3022	3088	0,98
1,69	0,98	3153	3217	3282	3346	3410	3474	3538	3601	3665	3728	0,98
1,70	0,98	3790	3853	3915	3978	4040	4101	4163	4224	4285	4346	0,98
1,71	0,98	4407	4468	4528	4588	4648	4707	4767	4826	4885	4944	0,98
1,72	0,98	5003	5061	5120	5178	5235	5293	5351	5408	5465	5522	0,98
1,73	0,98	5578	5635	5691	5747	5803	5859	5914	5970	6025	6080	0,98
1,74	0,98	6135	6189	6244	6298	6352	6405	6459	6513	6566	6619	0,98
1,75	0,98	6672	6724	6777	6829	6881	6933	6985	7037	7088	7139	0,98
1,76	0,98	7190	7241	7292	7342	7393	7443	7493	7543	7592	7642	0,98
1,77	0,98	7691	7740	7789	7838	7886	7935	7983	8031	8079	8127	0,98
1,78	0,98	8174	8222	8269	8316	8363	8409	8456	8502	8549	8595	0,98
1,79	0,98	8641	8686	8732	8777	8822	8868	8912	8957	9002	9046	0,98
1,80	0,98	9091	9135	9179	9222	9266	9309	9353	9396	9439	9482	0,98
1,81	0,98	9525	9567	9609	9652	9694	9736	9778	9819	9861	9902	0,98
1,82	0,98	9943	9984	0025	0066	0106	0147	0187	0227	0267	0307	0,99
1,83	0,99	0347	0386	0426	0465	0504	0543	0582	0621	0659	0698	0,99
1,84	0,99	0736	0774	0812	0850	0888	0925	0963	1000	1037	1074	0,99
1,85	0,99	1111	1148	1184	1221	1257	1293	1330	1365	1401	1437	0,99
1,86	0,99	1472	1508	1543	1578	1613	1648	1683	1718	1752	1787	0,99
1,87	0,99	1821	1855	1889	1923	1956	1990	2024	2057	2090	2123	0,99
1,88	0,99	2156	2189	2222	2254	2287	2319	2352	2384	2416	2448	0,99
1,89	0,99	2479	2511	2542	2574	2605	2636	2667	2698	2729	2760	0,99

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1,90	0,99	2790	2821	2851	2881	2912	2942	2972	3001	3031	3061	0,99
1,91	0,99	3090	3119	3148	3178	3207	3235	3264	3293	3321	3350	0,99
1,92	0,99	3378	3406	3435	3463	3490	3518	3546	3574	3601	3628	0,99
1,93	0,99	3656	3683	3710	3737	3764	3790	3817	3844	3870	3896	0,99
1,94	0,99	3923	3949	3975	4001	4026	4052	4078	4103	4129	4154	0,99
1,95	0,99	4179	4204	4229	4254	4279	4304	4329	4353	4378	4402	0,99
1,96	0,99	4426	4450	4475	4498	4522	4546	4570	4593	4617	4640	0,99
1,97	0,99	4664	4687	4710	4733	4756	4779	4802	4824	4847	4870	0,99
1,98	0,99	4892	4914	4937	4959	4981	5003	5025	5047	5068	5090	0,99
1,99	0,99	5111	5133	5154	5176	5197	5218	5239	5260	5281	5302	0,99
2,00	0,99	5322	5343	5363	5384	5404	5425	5445	5465	5485	5505	0,99
2,01	0,99	5525	5545	5564	5584	5604	5623	5643	5662	5681	5700	0,99
2,02	0,99	5719	5738	5757	5776	5795	5814	5832	5851	5870	5888	0,99
2,03	0,99	5906	5925	5943	5961	5979	5997	6015	6033	6050	6068	0,99
2,04	0,99	6086	6103	6121	6138	6156	6173	6190	6207	6224	6241	0,99
2,05	0,99	6258	6275	6292	6308	6325	6342	6358	6375	6391	6407	0,99
2,06	0,99	6423	6440	6456	6472	6488	6504	6519	6535	6551	6567	0,99
2,07	0,99	6582	6598	6613	6628	6644	6659	6674	6689	6704	6719	0,99
2,08	0,99	6734	6749	6764	6779	6794	6808	6823	6837	6852	6866	0,99
2,09	0,99	6880	6895	6909	6923	6937	6951	6965	6979	6993	7007	0,99
2,10	0,99	7021	7034	7048	7061	7075	7088	7102	7115	7128	7142	0,99
2,11	0,99	7155	7168	7181	7194	7207	7220	7233	7246	7258	7271	0,99
2,12	0,99	7284	7296	7309	7321	7334	7346	7358	7371	7383	7395	0,99
2,13	0,99	7407	7419	7431	7443	7455	7467	7479	7490	7502	7514	0,99
2,14	0,99	7525	7537	7548	7560	7571	7583	7594	7605	7616	7627	0,99
2,15	0,99	7639	7650	7661	7672	7683	7693	7704	7715	7726	7737	0,99
2,16	0,99	7747	7758	7768	7779	7789	7800	7810	7820	7831	7841	0,99
2,17	0,99	7851	7861	7871	7881	7891	7901	7911	7921	7931	7941	0,99
2,18	0,99	7951	7960	7970	7980	7989	7999	8008	8018	8027	8037	0,99
2,19	0,99	8046	8055	8065	8074	8083	8092	8101	8110	8119	8128	0,99
2,20	0,99	8137	8146	8155	8164	8173	8181	8190	8199	8207	8216	0,99
2,21	0,99	8224	8233	8241	8250	8258	8267	8275	8283	8292	8300	0,99
2,22	0,99	8308	8316	8324	8332	8340	8348	8356	8364	8372	8380	0,99
2,23	0,99	8388	8396	8403	8411	8419	8426	8434	8442	8449	8457	0,99
2,24	0,99	8464	8472	8479	8486	8494	8501	8508	8516	8523	8530	0,99
2,25	0,99	8537	8544	8552	8559	8566	8573	8580	8586	8593	8600	0,99
2,26	0,99	8607	8614	8621	8627	8634	8641	8648	8654	8661	8667	0,99
2,27	0,99	8674	8680	8687	8693	8700	8706	8712	8719	8725	8731	0,99
2,28	0,99	8738	8744	8750	8756	8762	8768	8775	8781	8787	8793	0,99
2,29	0,99	8799	8805	8810	8816	8822	8828	8834	8840	8845	8851	0,99

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,30	0,99	8857	8862	8868	8874	8879	8885	8890	8896	8902	8907
2,31	0,99	8912	8918	8923	8929	8934	8939	8945	8950	8955	8960
2,32	0,99	8966	8971	8976	8981	8986	8991	8996	9001	9006	9011
2,33	0,99	9016	9021	9026	9031	9036	9041	9045	9050	9055	9060
2,34	0,99	9065	9069	9074	9079	9083	9088	9093	9097	9102	9106
2,35	0,99	9111	9115	9120	9124	9129	9133	9137	9142	9146	9150
2,36	0,99	9155	9159	9163	9168	9172	9176	9180	9184	9189	9193
2,37	0,99	9197	9201	9205	9209	9213	9217	9221	9225	9229	9233
2,38	0,99	9237	9241	9245	9249	9252	9256	9260	9264	9268	9271
2,39	0,99	9275	9279	9282	9286	9290	9293	9297	9301	9304	9308
2,40	0,99	9311	9315	9319	9322	9326	9329	9333	9336	9339	9343
2,41	0,99	9346	9350	9353	9356	9360	9363	9366	9370	9373	9376
2,42	0,99	9379	9383	9386	9389	9392	9395	9398	9402	9405	9408
2,43	0,99	9411	9414	9417	9420	9423	9426	9429	9432	9435	9438
2,44	0,99	9441	9444	9447	9450	9452	9455	9458	9461	9464	9467
2,45	0,99	9469	9472	9475	9478	9480	9483	9486	9489	9491	9494
2,46	0,99	9497	9499	9502	9505	9507	9510	9512	9515	9517	9520
2,47	0,99	9523	9525	9528	9530	9533	9535	9538	9540	9542	9545
2,48	0,99	9547	9550	9552	9554	9557	9559	9561	9564	9566	9568
2,49	0,99	9571	9573	9575	9578	9580	9582	9584	9586	9589	9591
2,5	0,999	5930	6143	6345	6537	6720	6893	7058	7215	7364	7505
2,6	0,999	7640	7767	7888	8003	8112	8215	8313	8406	8494	8578
2,7	0,999	8657	8732	8803	8870	8934	8994	9051	9105	9156	9204
2,8	0,999	9250	9293	9334	9373	9409	9443	9476	9507	9536	9563
2,9	0,999	9589	9613	9636	9658	9679	9698	9716	9733	9750	9765
3,0	0,999	9779	9793	9805	9817	9829	9839	9849	9859	9867	9876
3,1	0,999	9884	9891	9898	9904	9910	9916	9921	9926	9931	9936
3,2	0,999	9940	9944	9947	9951	9954	9957	9960	9962	9965	9967
3,3	0,999	9969	9971	9973	9975	9977	9978	9980	9981	9982	9984
3,4	0,999	9985	9986	9987	9988	9989	9989	9990	9991	9991	9992
3,5	0,999	9993	9993	9994	9994	9994	9995	9995	9996	9996	9996
3,6	0,999	9996	9997	9997	9997	9997	9998	9998	9998	9998	9998
3,7	0,999	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Примѣры, выясняющіе составъ таблицъ.

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{0,212} e^{-t^2}\,dt \doteq 0,235680; \qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{0,293} e^{-t^2}\,dt = 0,321393.$$

ОГЛАВЛЕНІЕ.